

Tema 3

Diagrama de Voronoi



Georgy Feodosevich Voronoi (1868-1908)

Introducción

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

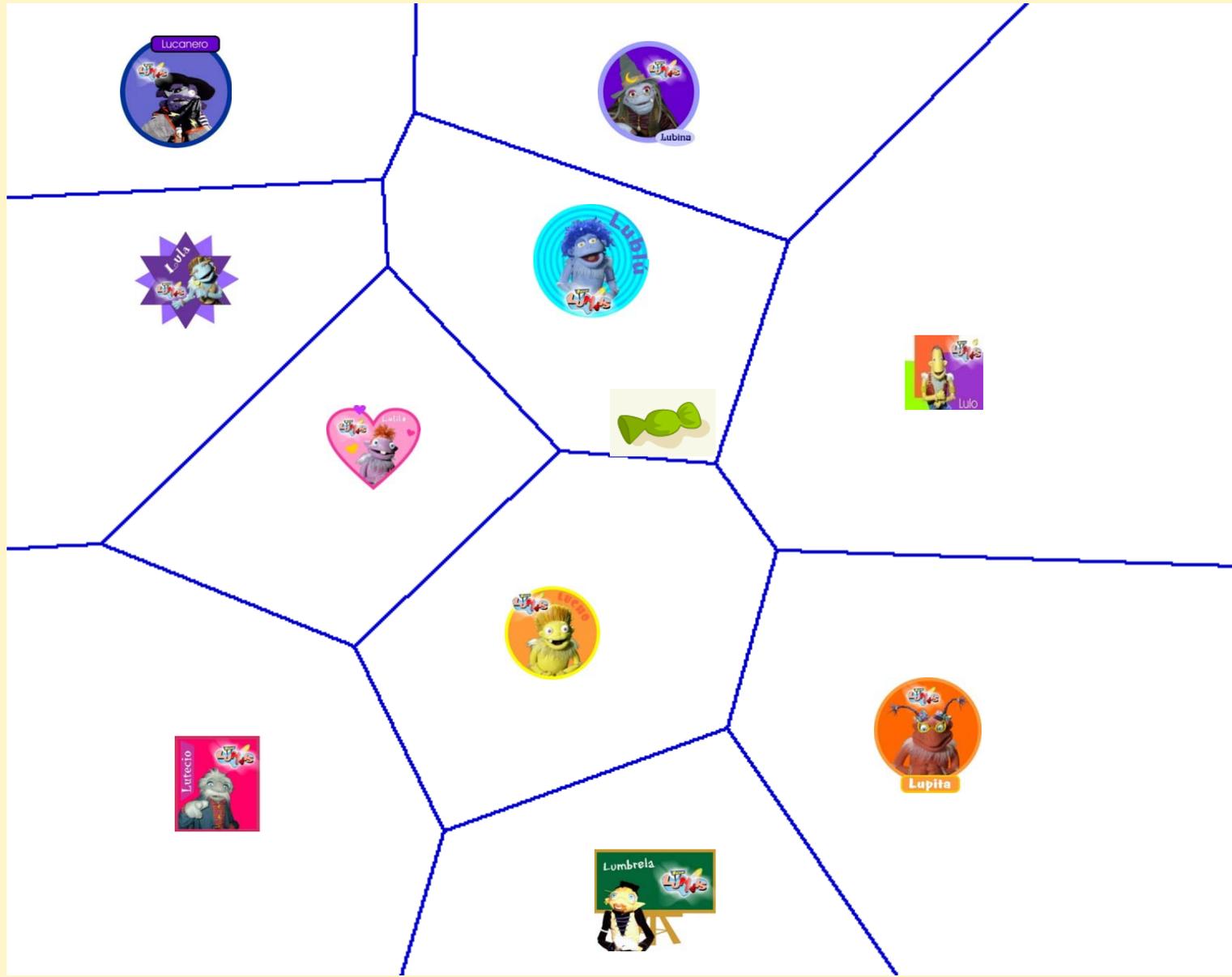
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Introducción

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

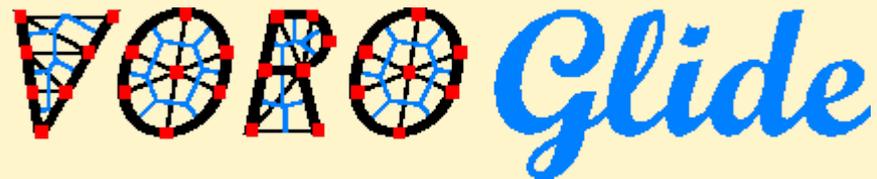
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

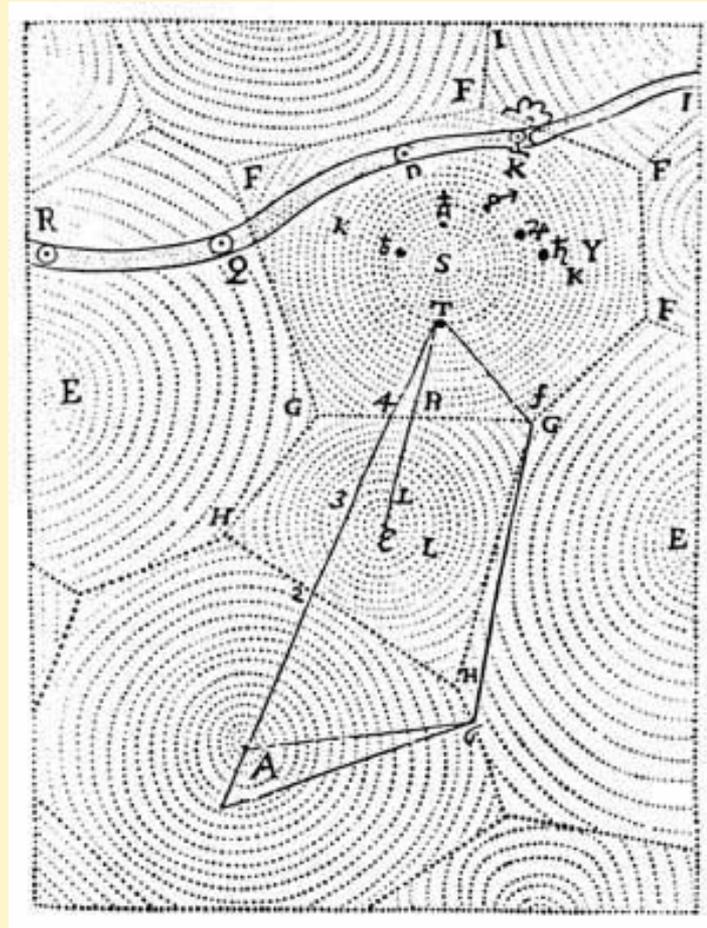
Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



<http://www.pi6.fernuni-hagen.de/GeomLab/VoroGlide/index.html.en>

Historia

Primera aparición en el siglo XVII, en un libro de R. Descartes.



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Historia

Ha sido redescubierto varias veces en distintos campos científicos.

Tema 3
 Diagrama de Voronoi

Introducción

Historia
 Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente convexa

Fundamentos de
 Geometría
 Computacional
 I.T.I. Gestión

Descartes	Astronomy	1644	“Heavens”
Dirichlet	Math	1850	Dirichlet tessellation
Voronoi	Math	1908	Voronoi diagram
Boldyrev	Geology	1909	area of influence polygons
Thiessen	Meteorology	1911	Thiessen polygons
Niggli	Crystallography	1927	domains of action
Wigner & Seitz	Physics	1933	Wigner-Seitz regions
Frank & Casper	Physics	1958	atom domains
Brown	Ecology	1965	areas potentially available
Mead	Ecology	1966	plant polygons
Hoofd et al.	Anatomy	1985	capillary domains
Icke	Astronomy	1987	Voronoi diagram

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

Incremental

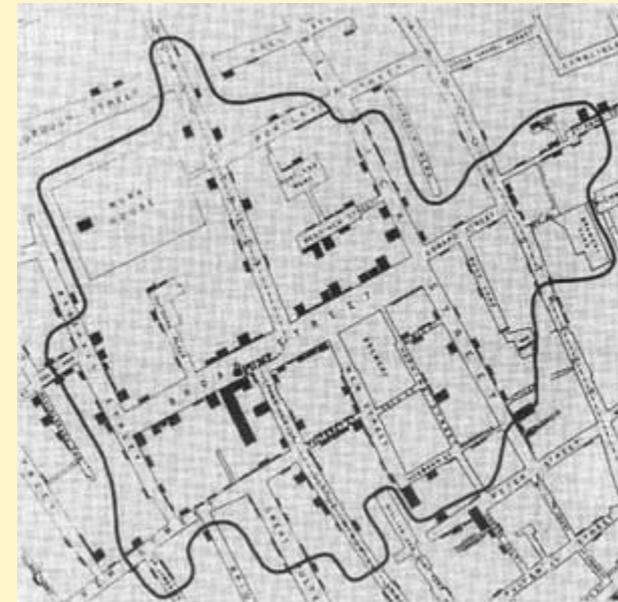
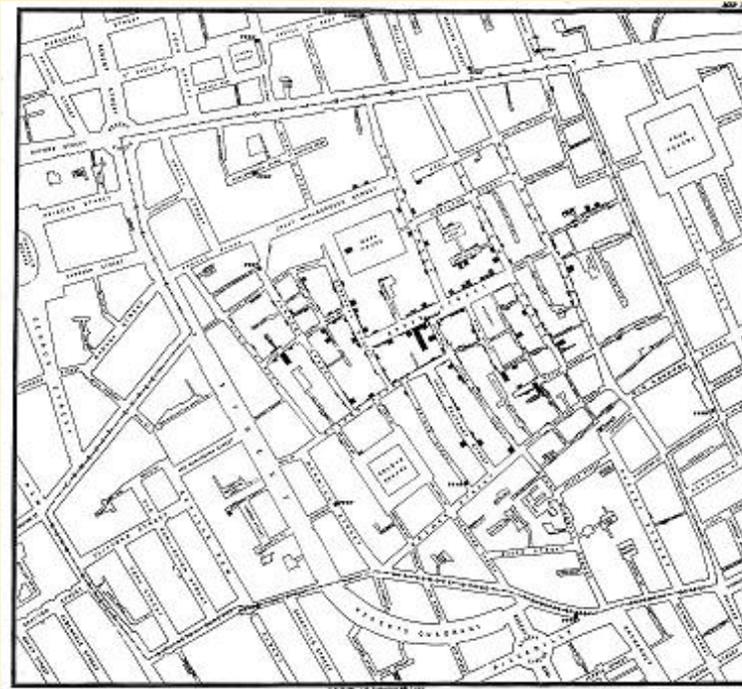
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

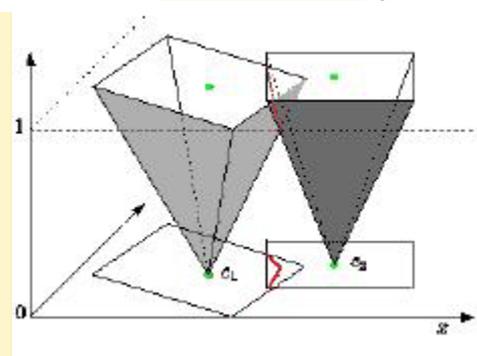
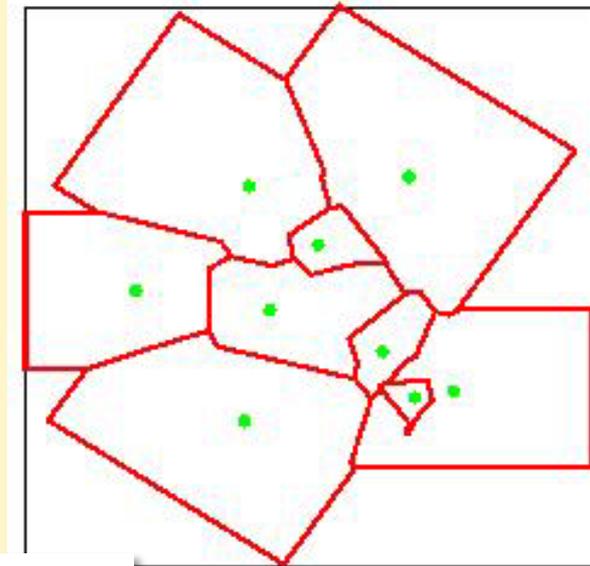
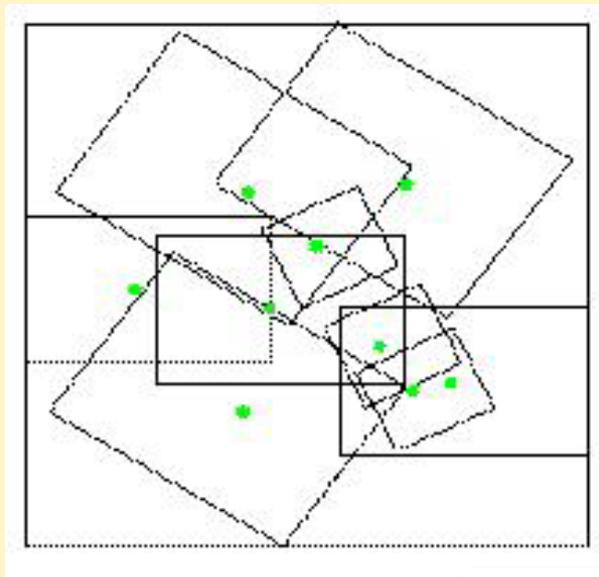
Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

En el siglo XIX John Snow lo utiliza para determinar la fuente de una epidemia de cólera en Londres.



Aplicaciones

Cartografía, por ejemplo para construir una imagen a partir de varias fotos aéreas o de satélite.



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

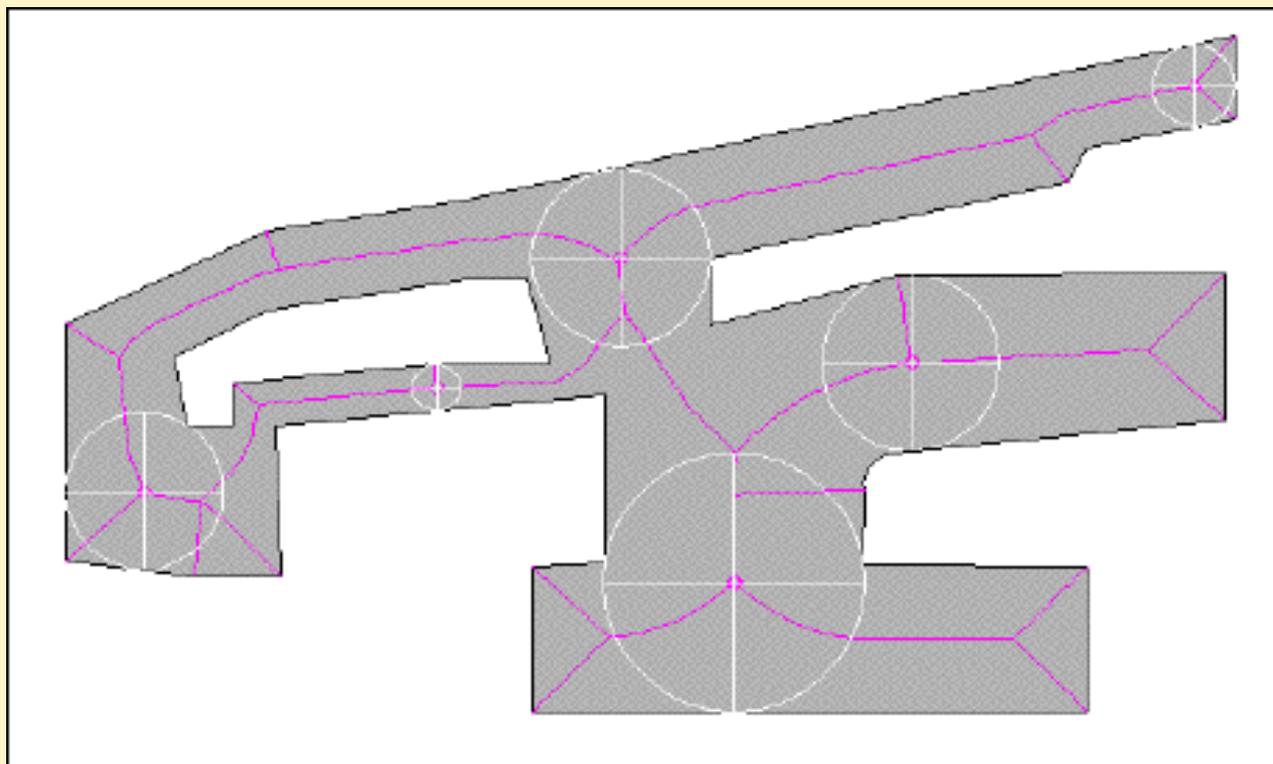
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Construcción del *medial axis* o del esqueleto



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

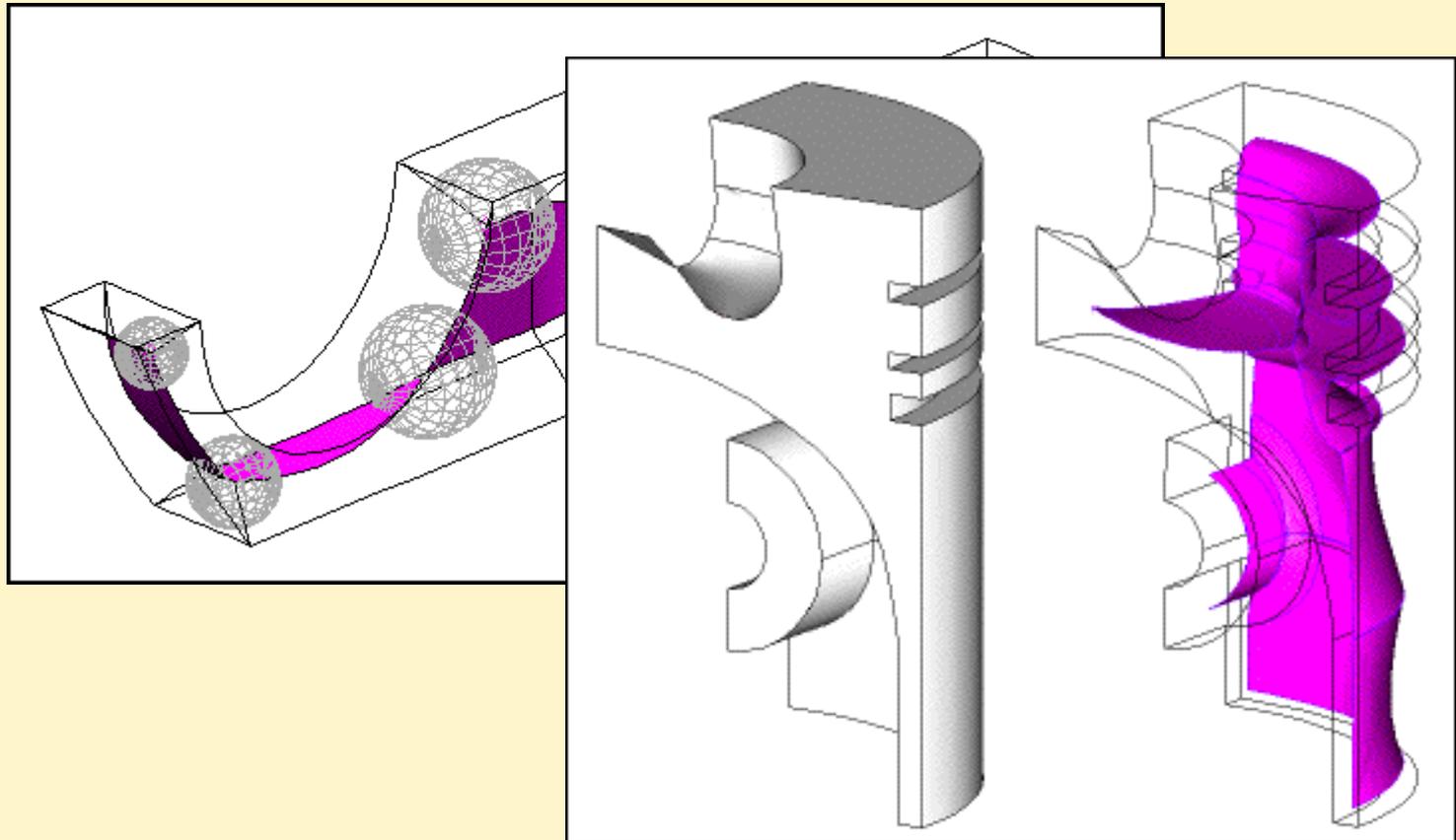
Allgoritmos

Incremental
Divide y vencerás
Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Construcción del *medial axis* o del esqueleto



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

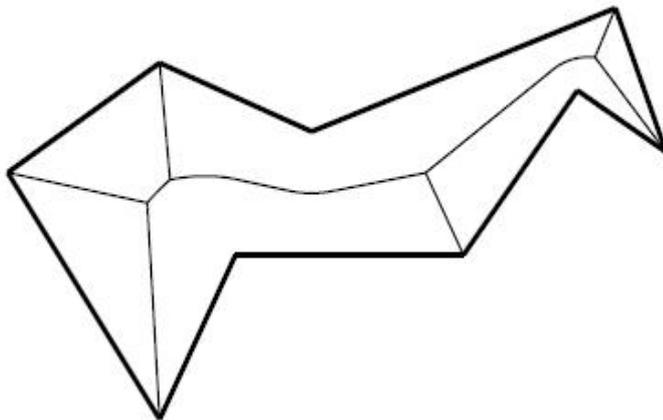
Fortune

Envolvente
convexa

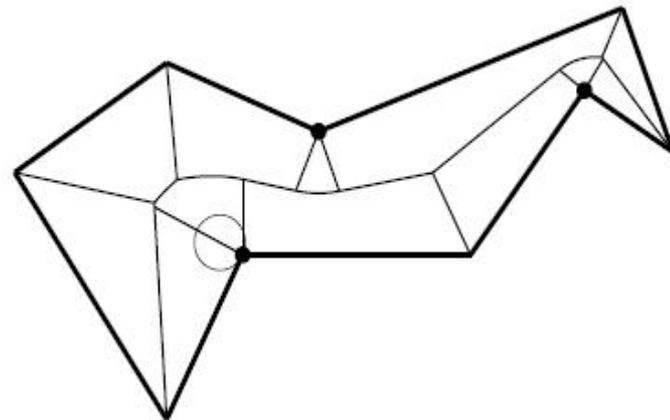
Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Construcción del *medial axis* o del esqueleto

Medial axis



Voronoi diagram



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

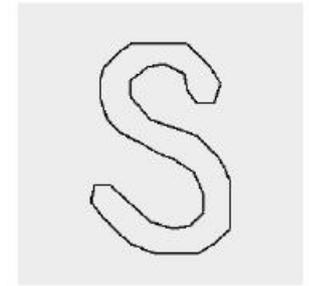
Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Construcción del *mediator*



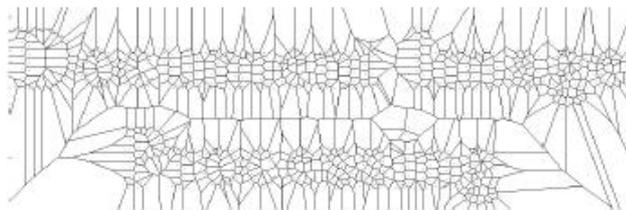
(a) Planar Shape



(b) Polygonal
Approximation

Document Image Processing

(a) image



(c) point Voronoi diagram

Document Image Processing

(b) sample points



(d) area Voronoi diagram

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

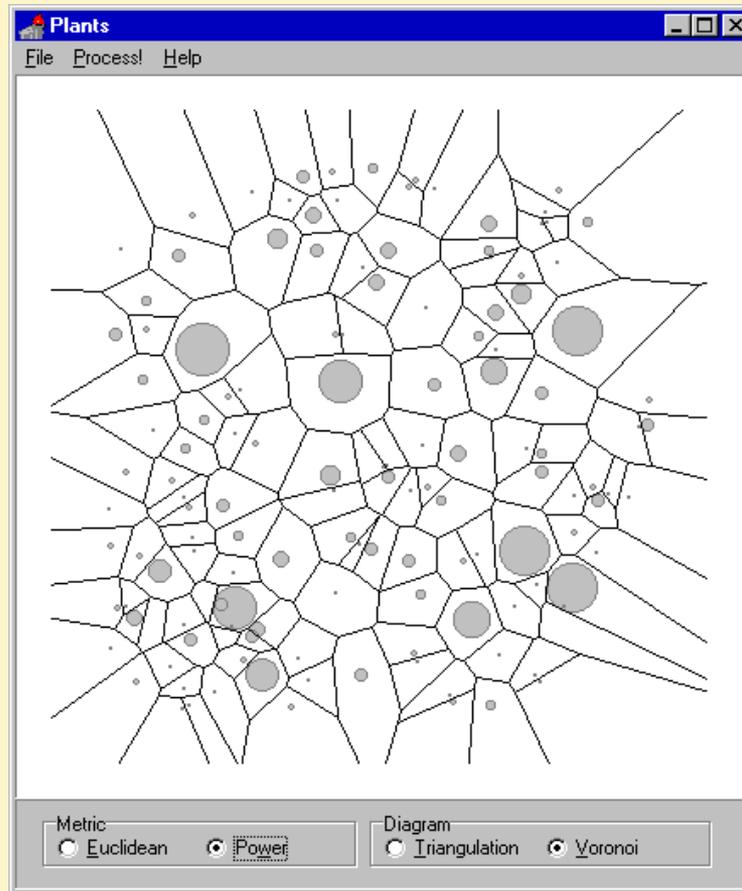
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

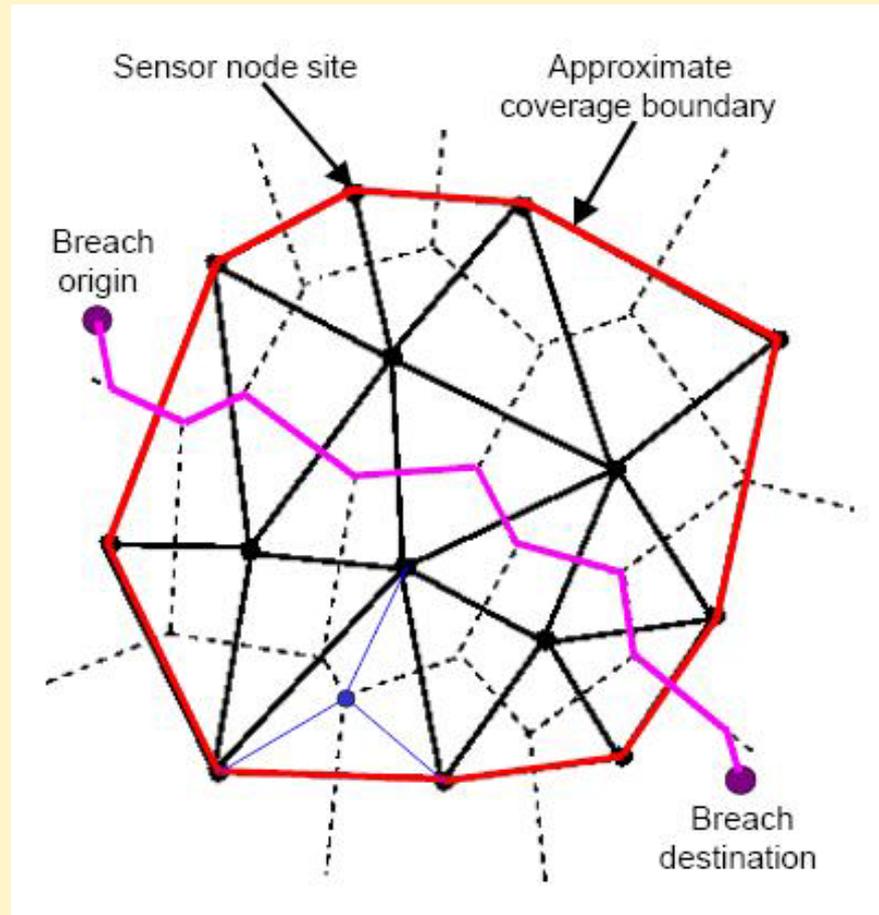
Ecología.



Voronoi Art.

<http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/voronoi/>
http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=284

Colocar o evitar sensores.



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

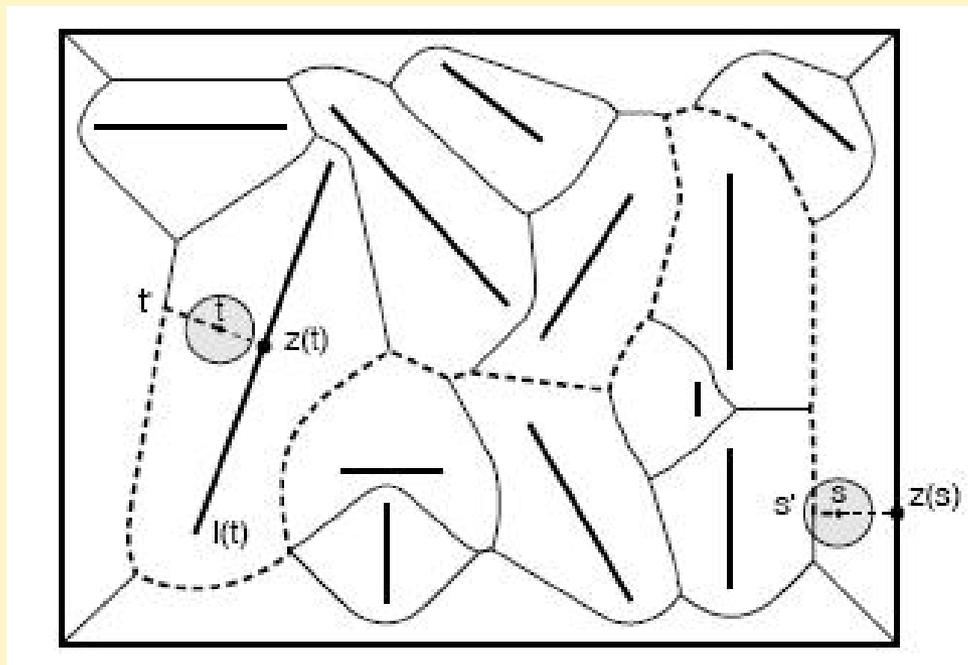
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Diseño de rutas de robots.



Aplicaciones

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Y otras muchas (meteorología, ecología, geología, antropología,...) en

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/scot.drysdale.html>

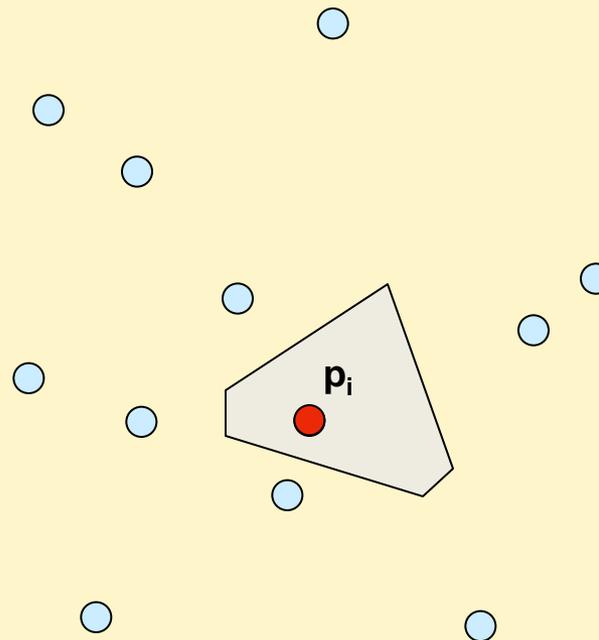
<http://www.voronoi.com>

Propiedades

¿Qué puntos del plano están más cerca del punto p_i (rojo) que del resto de puntos de la nube (azules)?

Región de Voronoi del punto p_i

$\text{Vor}(p_i)$



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

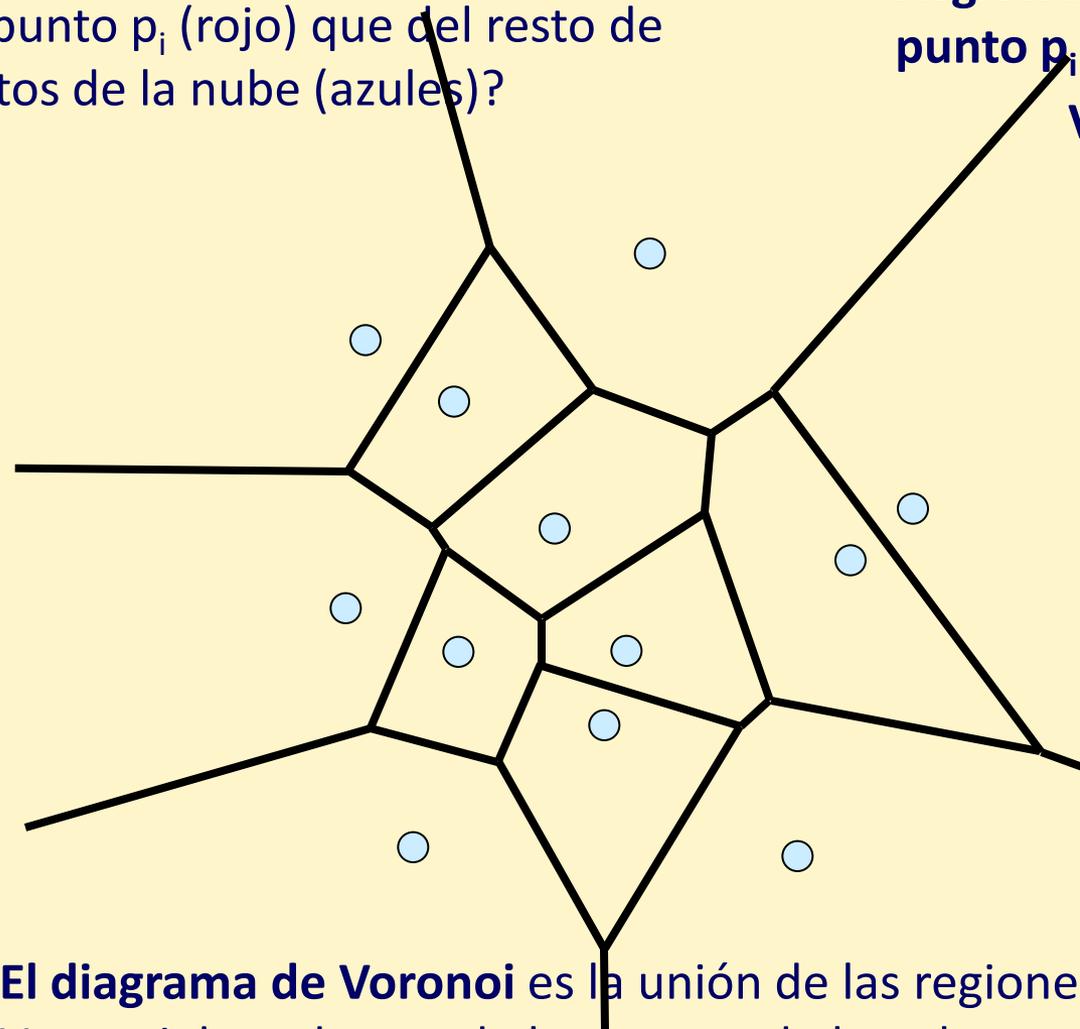
Fortune

Envolvente
convexa

Propiedades

¿Qué puntos del plano están más cerca del punto p_i (rojo) que del resto de puntos de la nube (azules)?

Región de Voronoi del punto p_i
 $Vor(p_i)$



El diagrama de Voronoi es la unión de las regiones de Voronoi de cada uno de los puntos de la nube.

Tema 3
Diagrama de Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

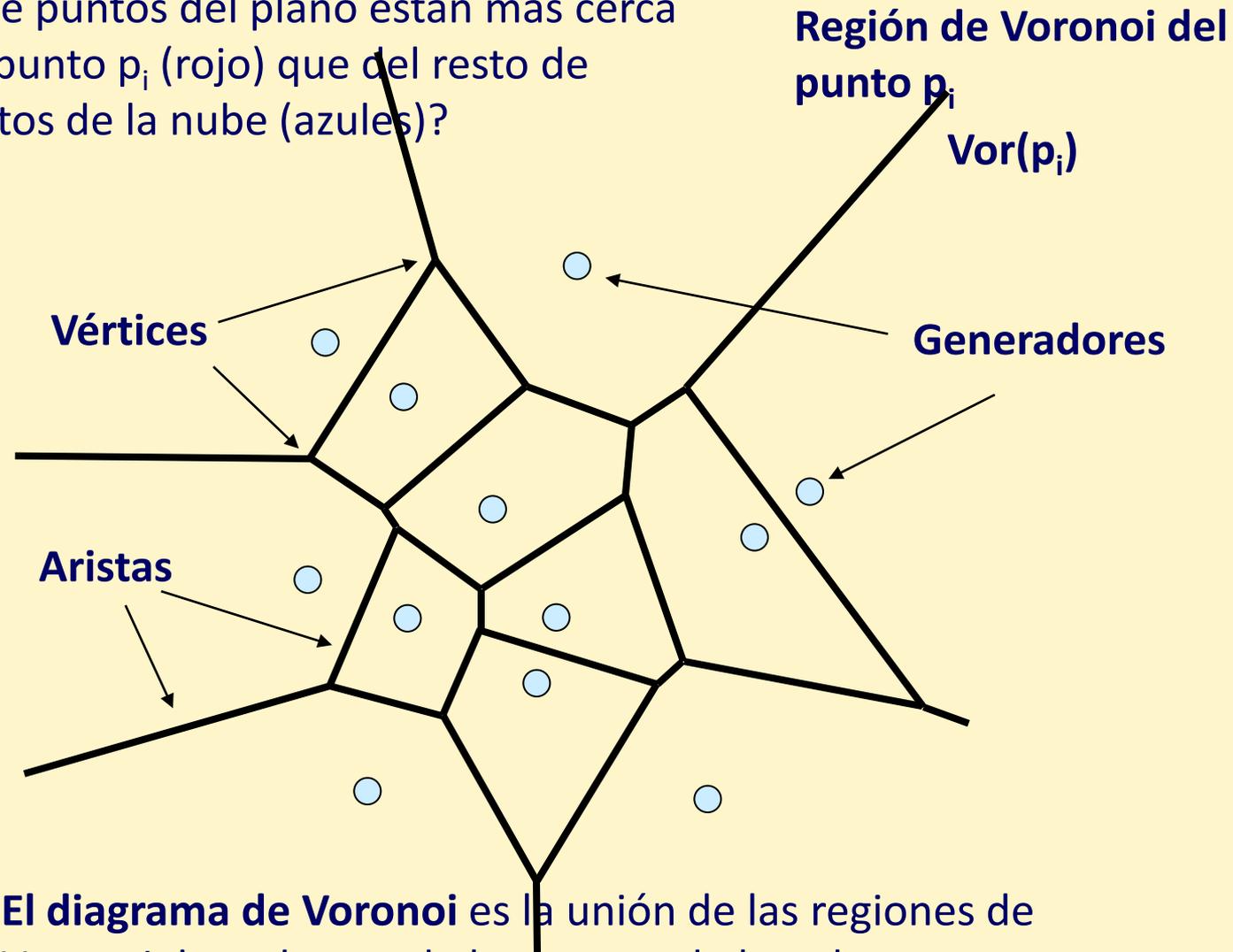
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente convexa

Propiedades

¿Qué puntos del plano están más cerca del punto p_i (rojo) que del resto de puntos de la nube (azules)?



El diagrama de Voronoi es la unión de las regiones de Voronoi de cada uno de los puntos de la nube.

Tema 3
Diagrama de Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

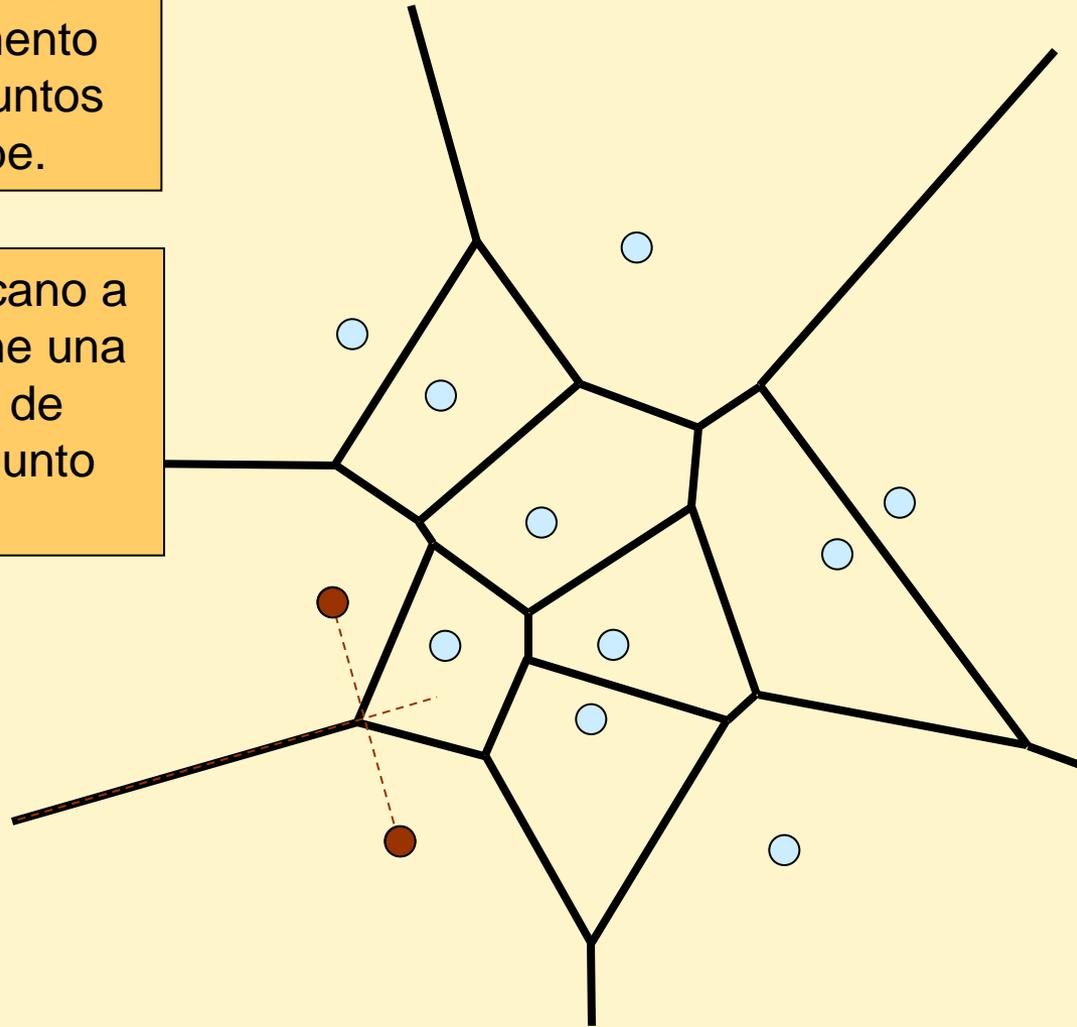
Fortune

Envolvente convexa

Propiedades

Cada arista está en la mediatriz del segmento $\overline{p_i p_j}$ que une dos puntos (vecinos) de la nube.

El vecino más cercano a cada punto p_i define una arista del polígono de Voronoi de dicho punto p_i .



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Propiedades

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental
Divide y vencerás
Fortune

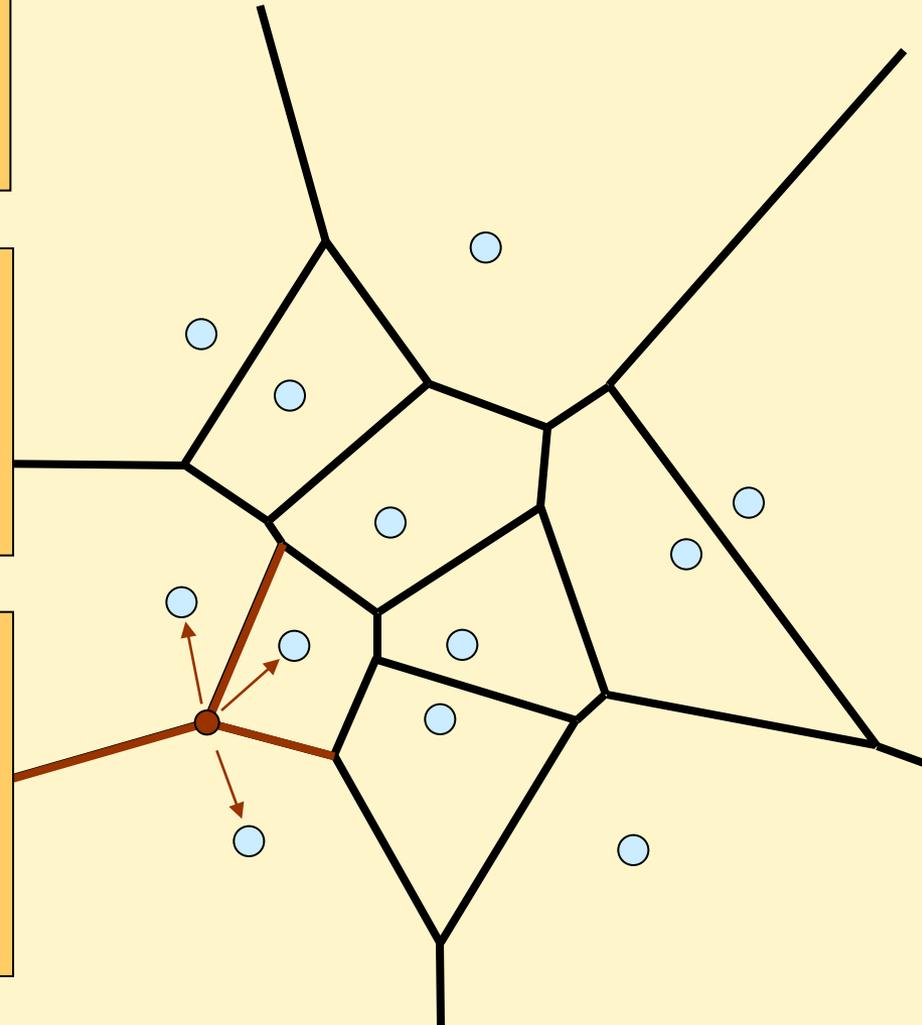
Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Cada arista está en la mediatriz del segmento $\overline{p_i p_j}$ que une dos puntos (vecinos) de la nube.

El vecino más cercano a cada punto p_i define una arista del polígono de Voronoi de dicho punto p_i .

Cada vértice es un punto equidistante a tres generadores (o más si es un caso degenerado) y es la intersección de tres aristas.



Propiedades

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental
Divide y vencerás
Fortune

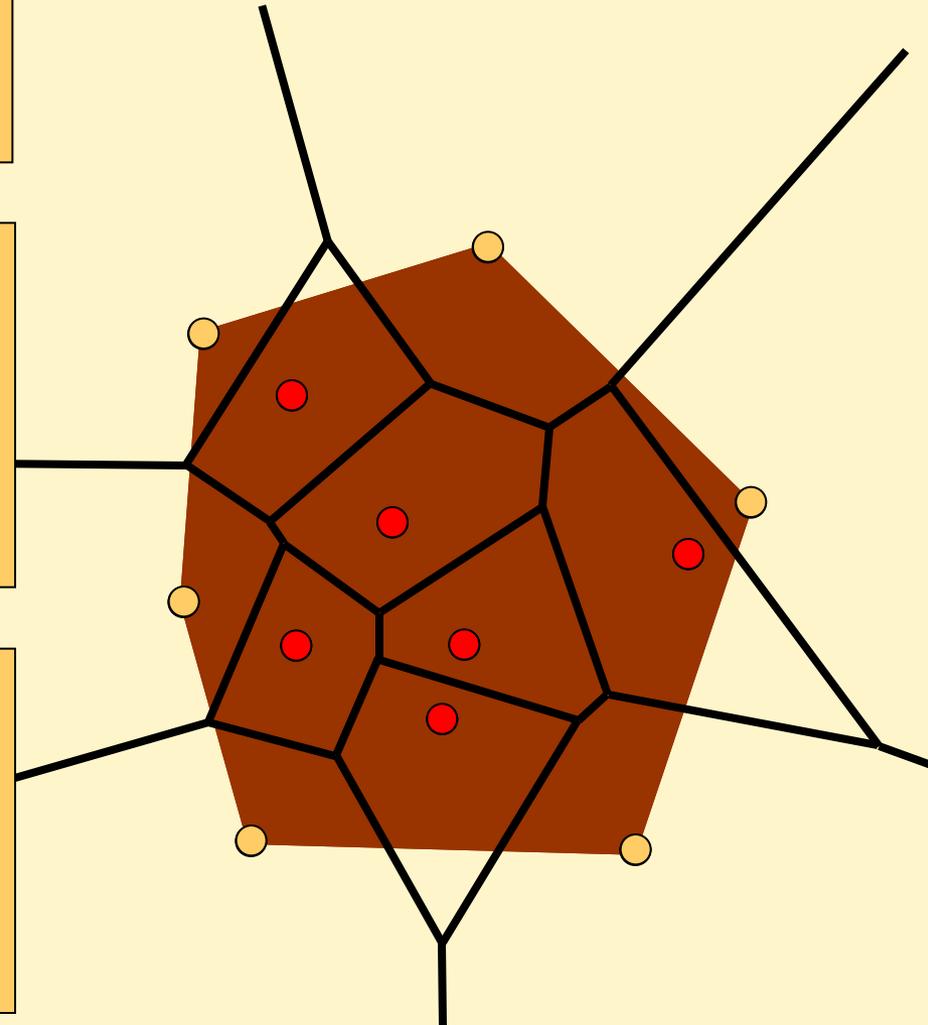
Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Una región de Voronoi es un polígono convexo o una región no acotada.

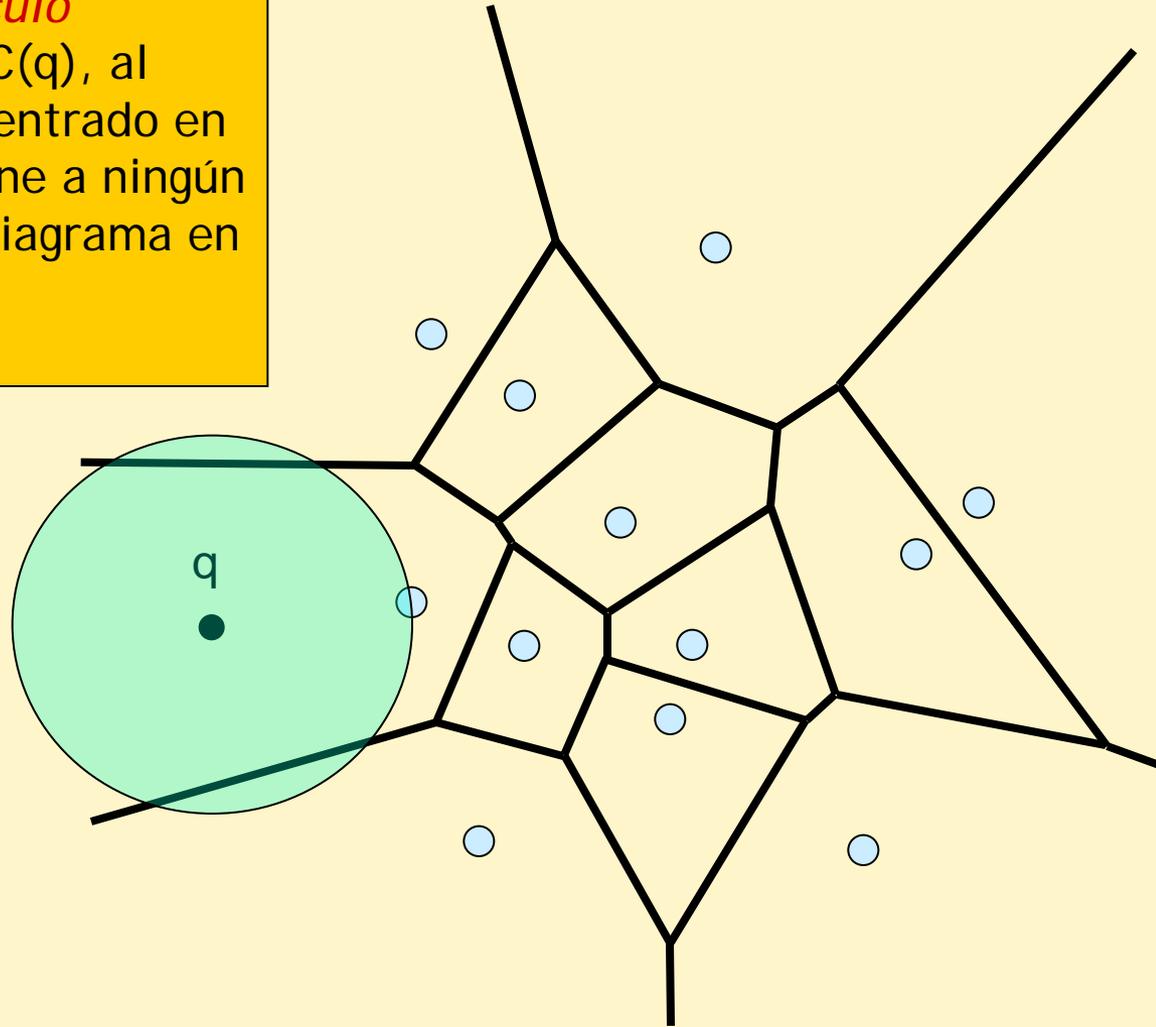
Una región de Voronoi es no acotada si su punto generador pertenece a la envolvente convexa de la nube de puntos.

Una región de Voronoi es un polígono convexo si su punto generador es interior a la envolvente convexa de la nube de puntos.



Propiedades

Dado un punto q
llamaremos *círculo
máximo vacío*, $C(q)$, al
mayor círculo centrado en
 q que no contiene a ningún
generador del diagrama en
su interior.



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Propiedades

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

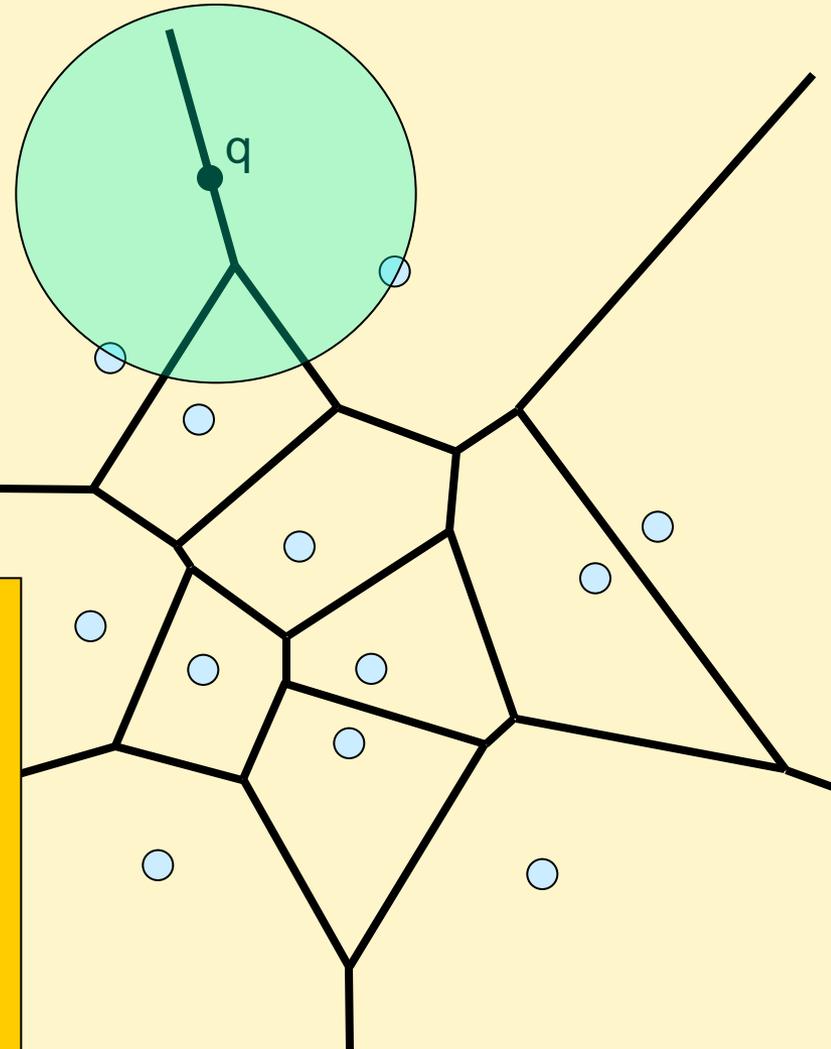
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Dado un punto q
llamaremos *círculo
máximo vacío*, $C(q)$, al
mayor círculo centrado en
 q que no contiene a ningún
generador del diagrama en
su interior.



La mediatriz entre dos
generadores define una arista
de $Vor(S)$ si (y sólo si) existe
un punto q sobre dicha
mediatriz tal que $C(q)$
contiene solamente a estos
dos generadores en su
frontera.

Propiedades

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

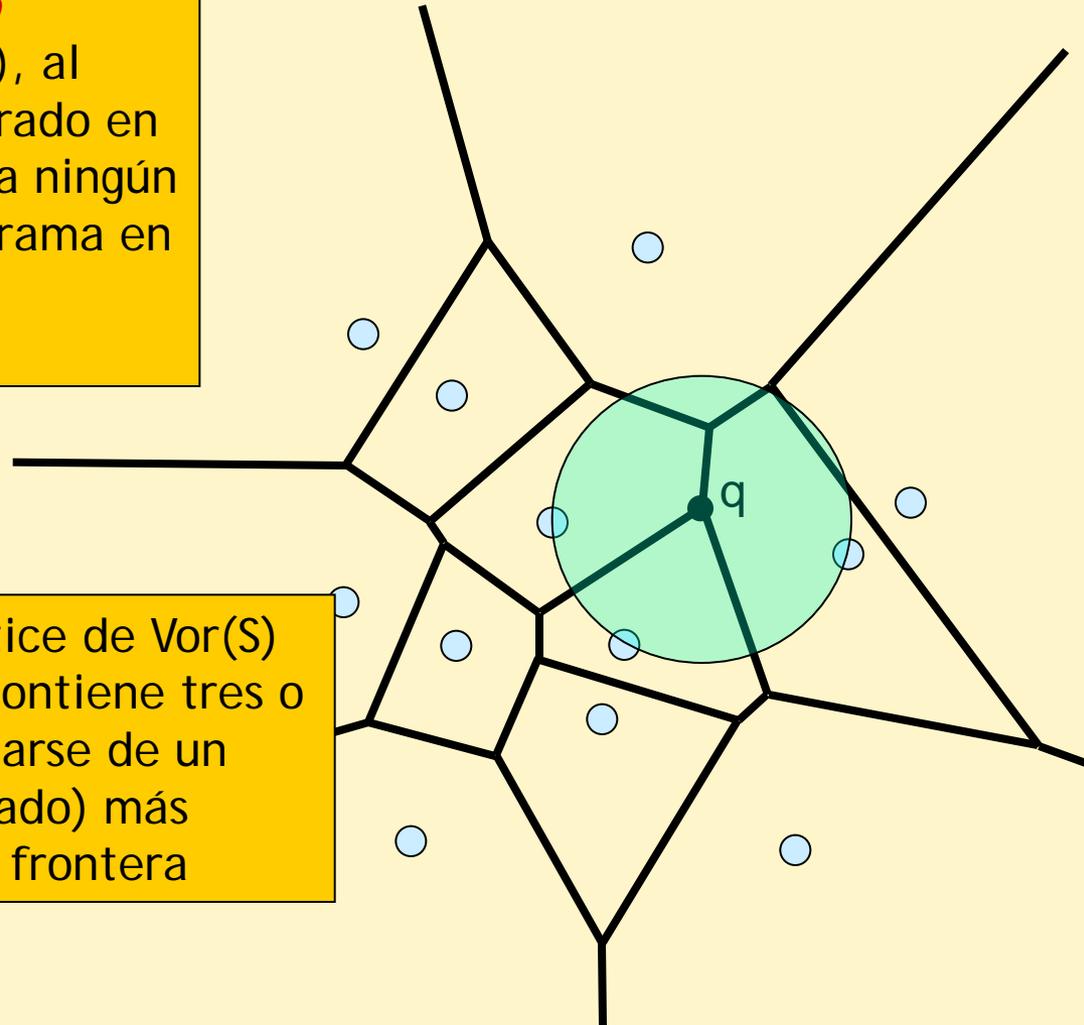
Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

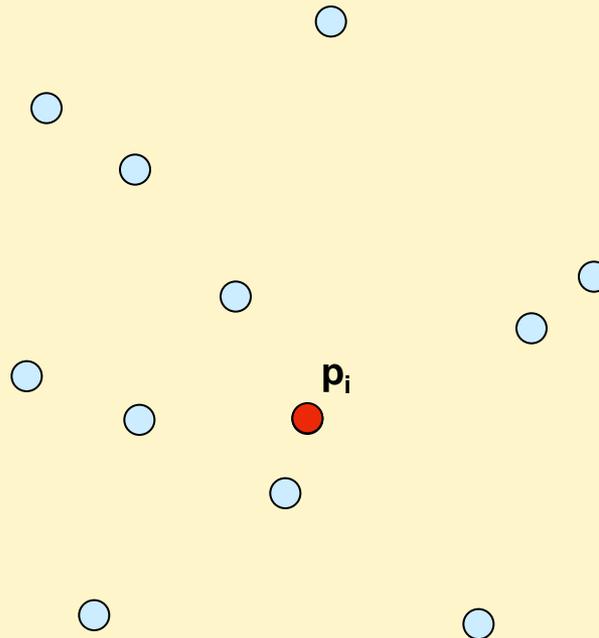
Dado un punto q
llamaremos *círculo
máximo vacío*, $C(q)$, al
mayor círculo centrado en
 q que no contiene a ningún
generador del diagrama en
su interior.

Un punto q es vértice de $\text{Vor}(S)$
si (y sólo si) $C(q)$ contiene tres o
(en el caso de tratarse de un
diagrama degenerado) más
generadores en su frontera



Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $\text{Vor}(p_i)$, de un punto (rojo)?



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $Vor(p_i)$, de un punto (rojo)?

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

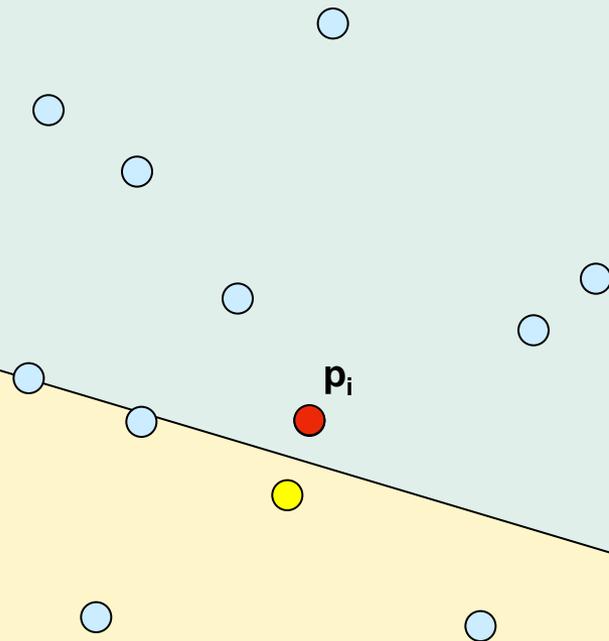
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Los puntos de $V(p_i)$ están más cerca del punto rojo que del amarillo

Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $Vor(p_i)$, de un punto (rojo)?

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

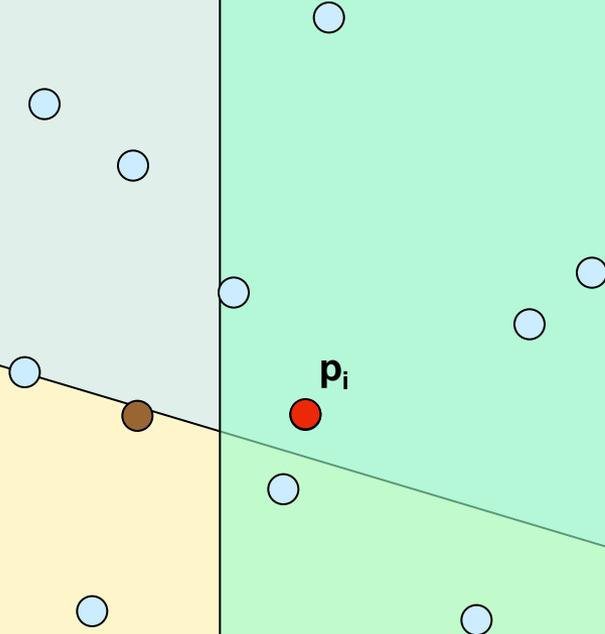
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Los puntos de $V(p_i)$ están más cerca del punto rojo que del marrón

Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $Vor(p_i)$, de un punto (rojo)?

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

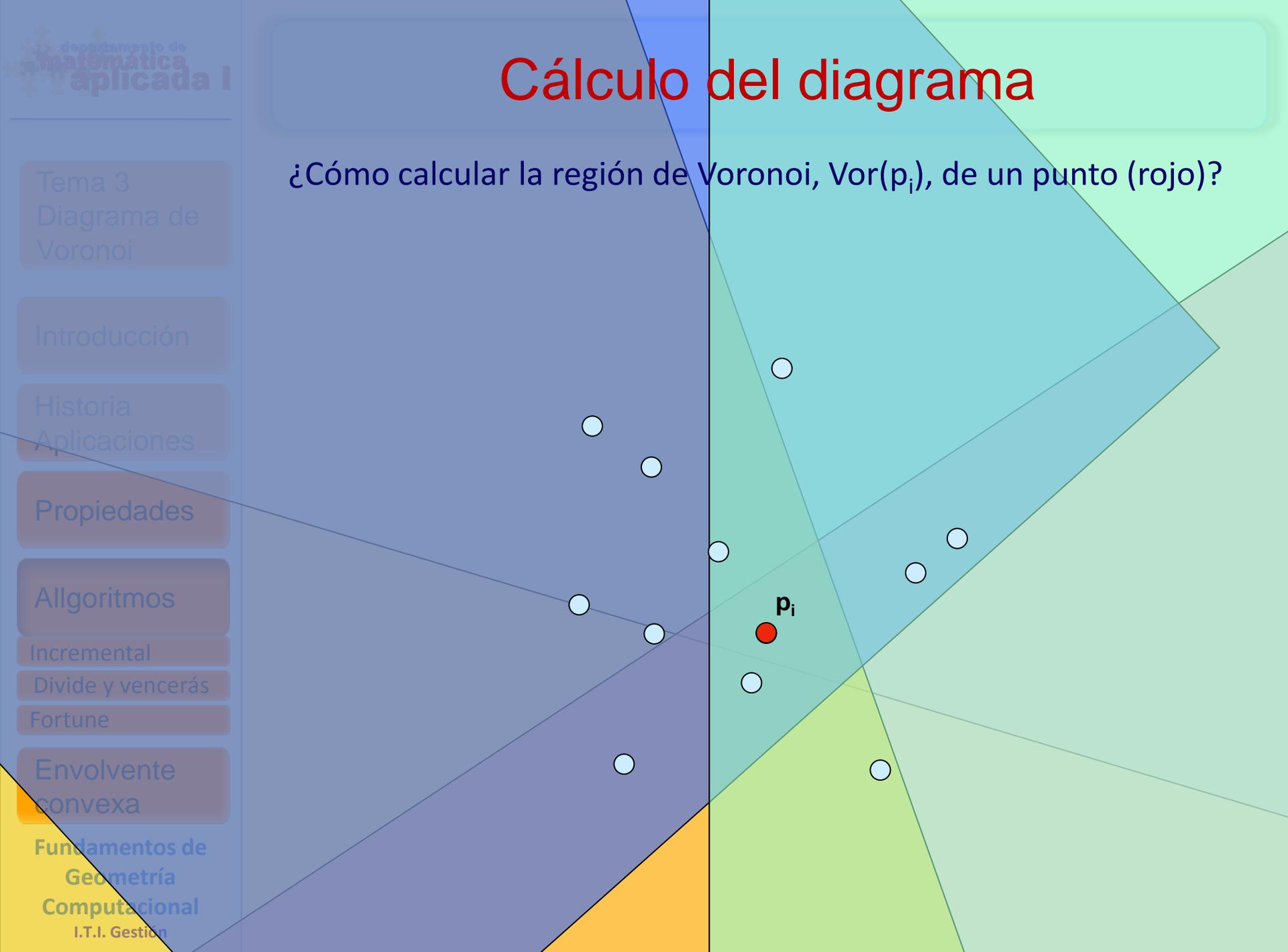
Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa



Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $Vor(p_i)$, de un punto (rojo)?

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

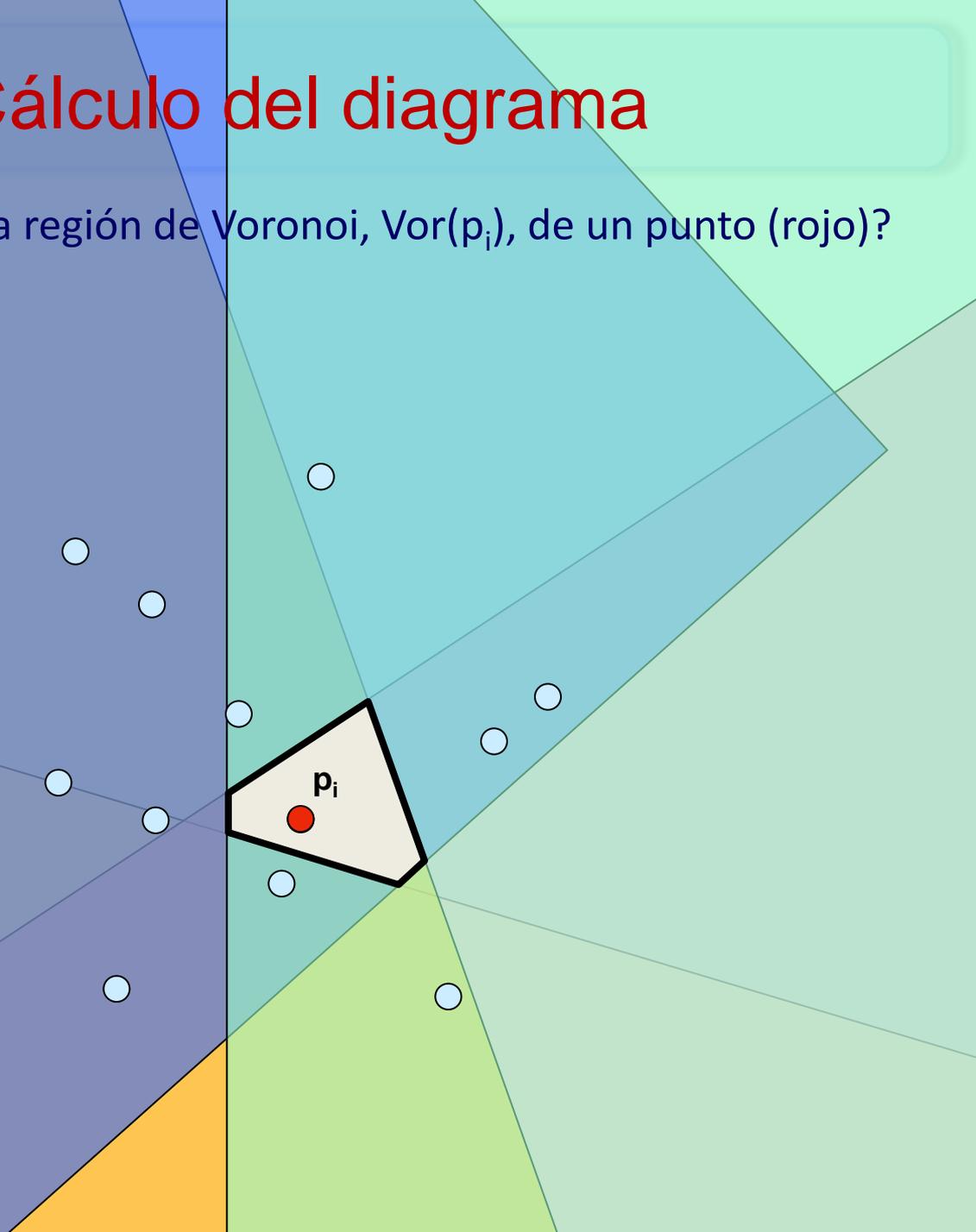
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

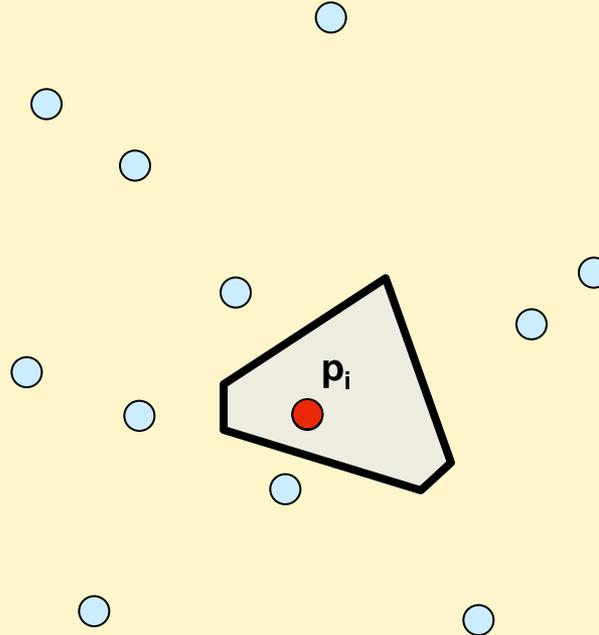
Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $Vor(p_i)$, de un punto (rojo)?



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

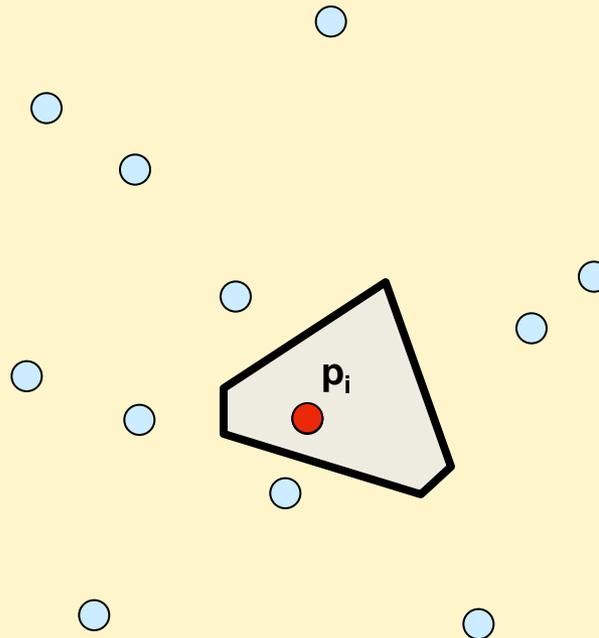
Envolvente
convexa

Cálculo del diagrama

¿Cómo calcular la región de Voronoi, $Vor(p_i)$, de un punto (rojo)?

Lema: *La intersección de los semiplanos $h(p_i, p_k)$ ($i \neq k$) es $Vor(p_i)$.*

Corolario: *$Vor(p_i)$ es un convexo.*



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Cálculo del diagrama

Lema: *La intersección de los semiplanos $h(p_i, p_k)$ ($i \neq k$) es $\text{Vor}(p_i)$.*

Teorema: *La intersección de n semiplanos se puede calcular en tiempo óptimo $O(n \log n)$.*

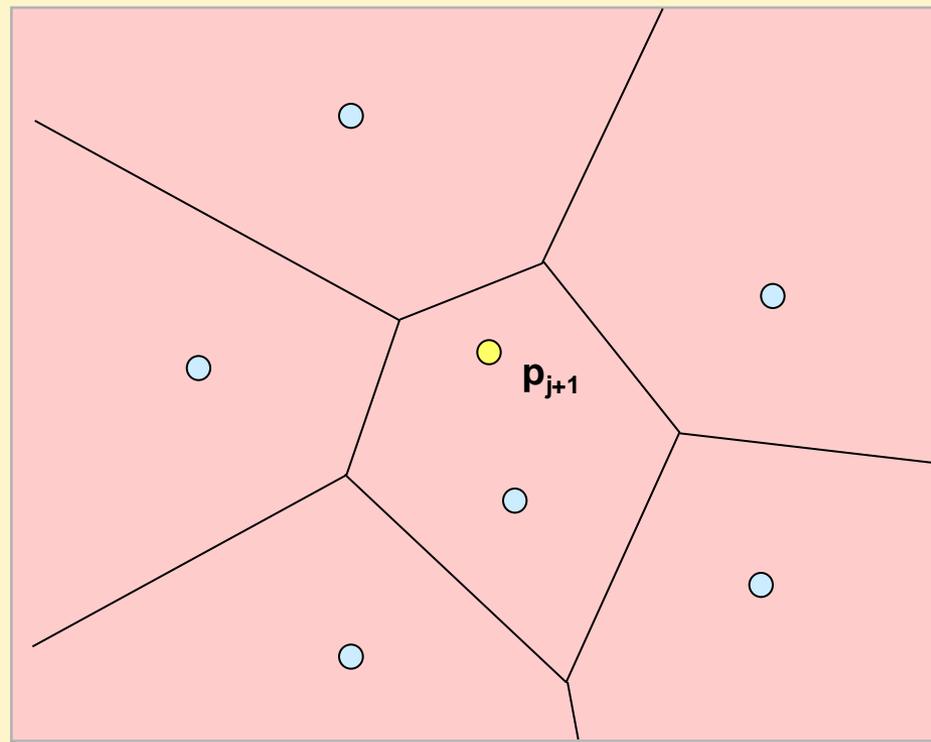
Corolario: *$\text{Vor}(p_i)$ se puede calcular en tiempo óptimo $O(n \log n)$.*

Corolario: *El diagrama de Voronoi de una nube de n puntos se puede calcular en tiempo ~~óptimo~~ $O(n^2 \log n)$.*

Algoritmo incremental

Construimos el diagrama de $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ *punto a punto*.

Suponemos que tenemos el diagrama de $S_j = \{p_1, \dots, p_j\}$
y añadimos un nuevo punto p_{j+1} .



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Algoritmo incremental

Tema 3
 Diagrama de
 Voronoi

Introducción

Historia
 Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
 convexa

Fundamentos de
 Geometría
 Computacional
 I.T.I. Gestión

Construimos el diagrama de $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ *punto a punto*.

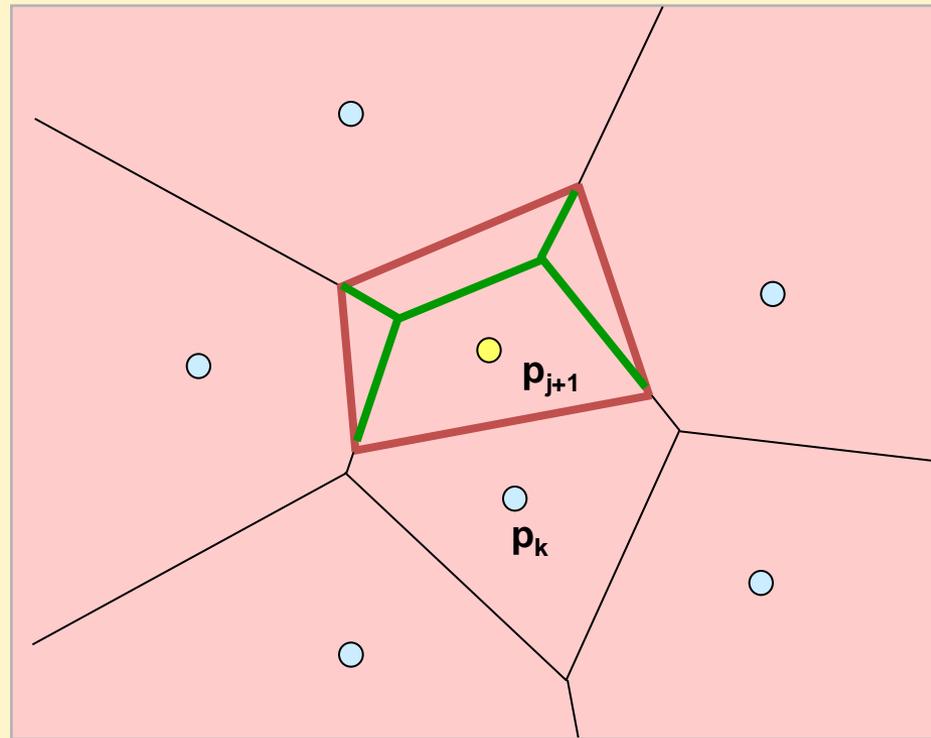
Suponemos que tenemos el diagrama de $S_j = \{p_1, \dots, p_j\}$ y añadimos un nuevo punto p_{j+1} .

Encontramos la región $Vor(p_k)$ donde se encuentra el punto p_{j+1} .

Trazamos la mediatriz del segmento $p_{j+1}p_k$.

Trazamos la mediatriz del segmento $p_{j+1}p_i$, siendo p_i “vecino” del vértice p_k .

Eliminar las porciones de arista y los vértices que queden dentro de la nueva región.



Algoritmo incremental

Construimos el diagrama de $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ *punto a punto*.

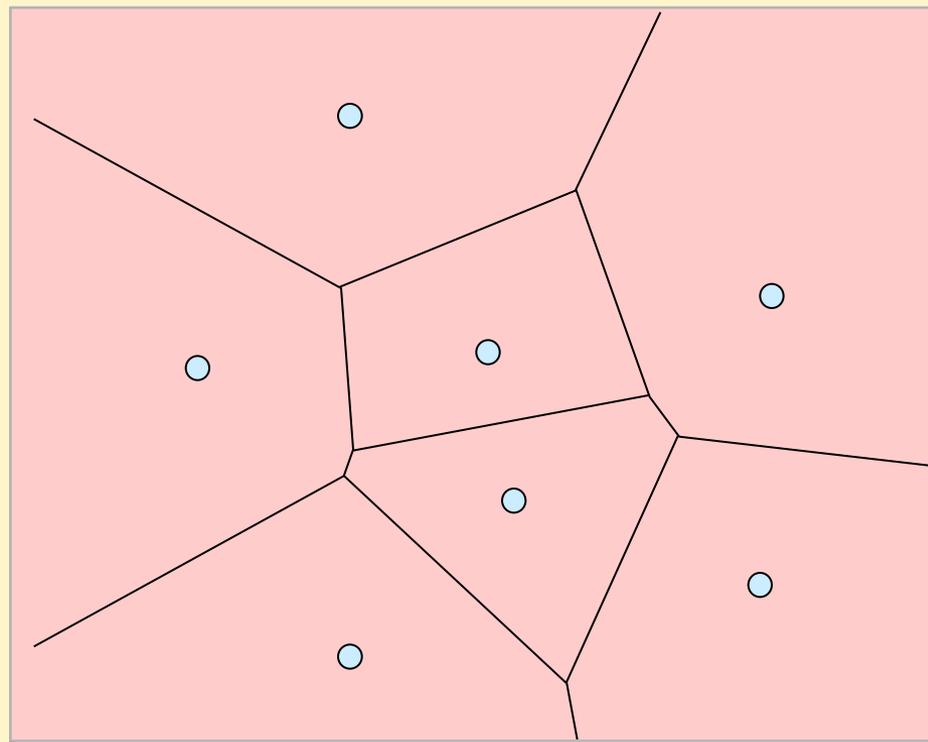
Suponemos que tenemos el diagrama de $S_j = \{p_1, \dots, p_j\}$ y añadimos un nuevo punto p_{j+1} .

Encontramos la región $\text{Vor}(p_k)$ donde se encuentra el punto p_{j+1} .

Trazamos la mediatriz del segmento $p_{j+1}p_k$.

Trazamos la mediatriz del segmento $p_{j+1}p_i$, siendo p_i “vecino” del vértice p_k .

Eliminar las porciones de arista y los vértices que queden dentro de la nueva región.



Algoritmo incremental

Construimos el diagrama de $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ *punto a punto*.

Suponemos que tenemos el diagrama de $S_j = \{p_1, \dots, p_j\}$
y añadimos un nuevo punto p_{j+1} .

Encontramos la región
 $\text{Vor}(p_k)$ donde se
encuentra el punto p_{j+1} .

Trazamos la mediatriz del
segmento $p_{j+1}p_k$.

Trazamos la mediatriz del
segmento $p_{j+1}p_i$, siendo p_i
“vecino” del vértice p_k

Eliminar las porciones de
arista y los vértices que
queden dentro de la
nueva región.

Lema: *Insertar cada punto
cuesta $O(n)$*

Teorema: *El algoritmo incremental
obtiene el diagrama de Voronoi de
una nube de n puntos en un tiempo
 $O(n^2)$.*

Algoritmo incremental

¡Ojo! El algoritmo falla si la región del nuevo punto es no acotada.

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

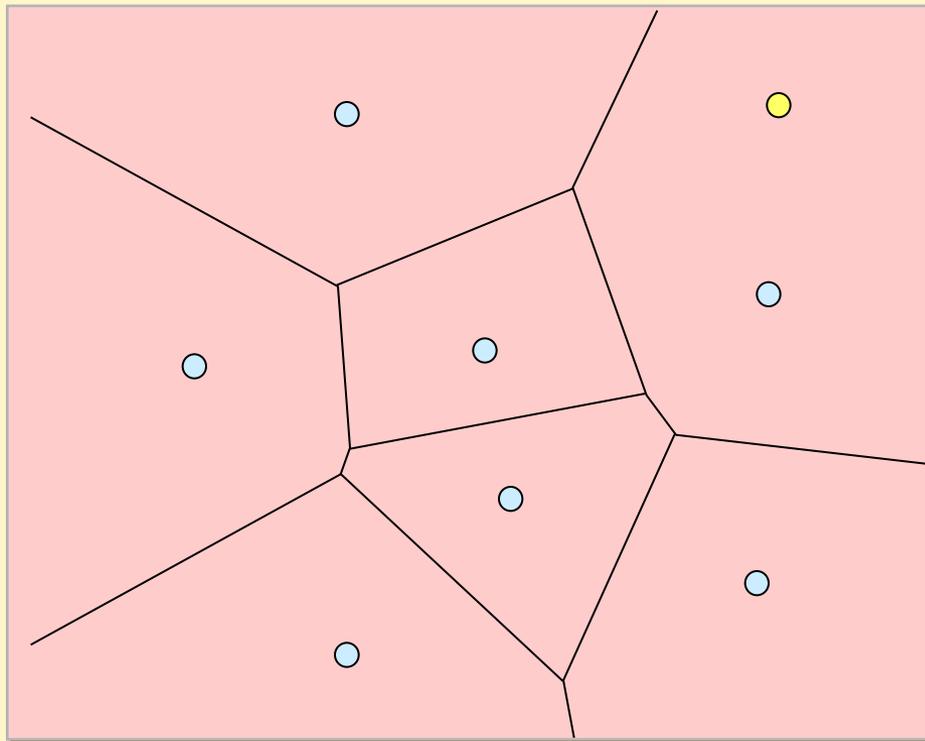
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

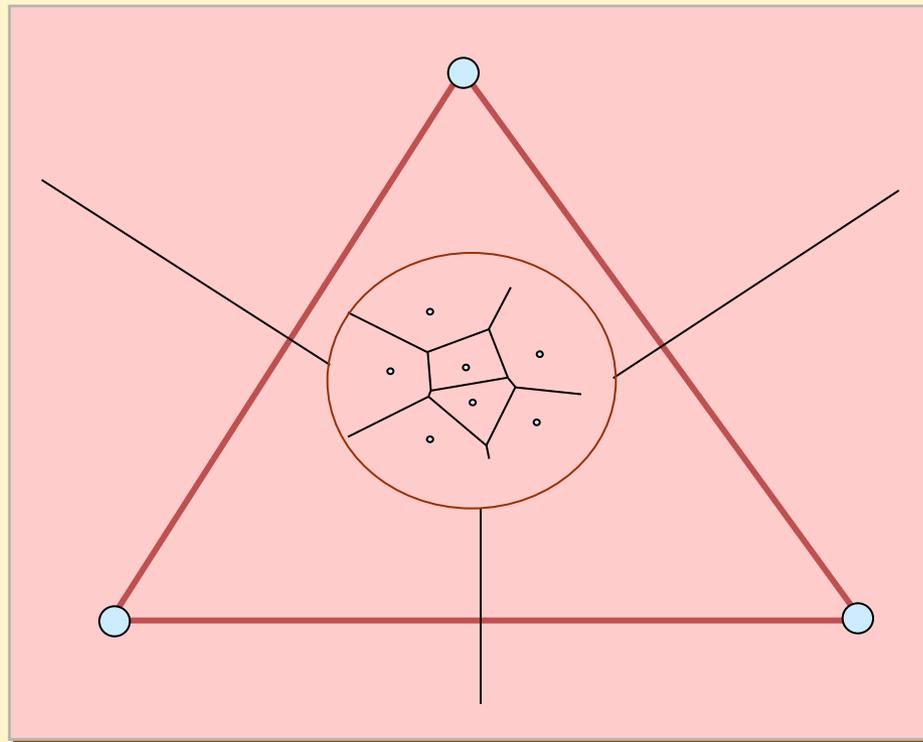
Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Algoritmo incremental

¡Ojo! El algoritmo falla si la región del nuevo punto es no acotada.

Esto puede arreglarse añadiendo tres puntos auxiliares.



Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

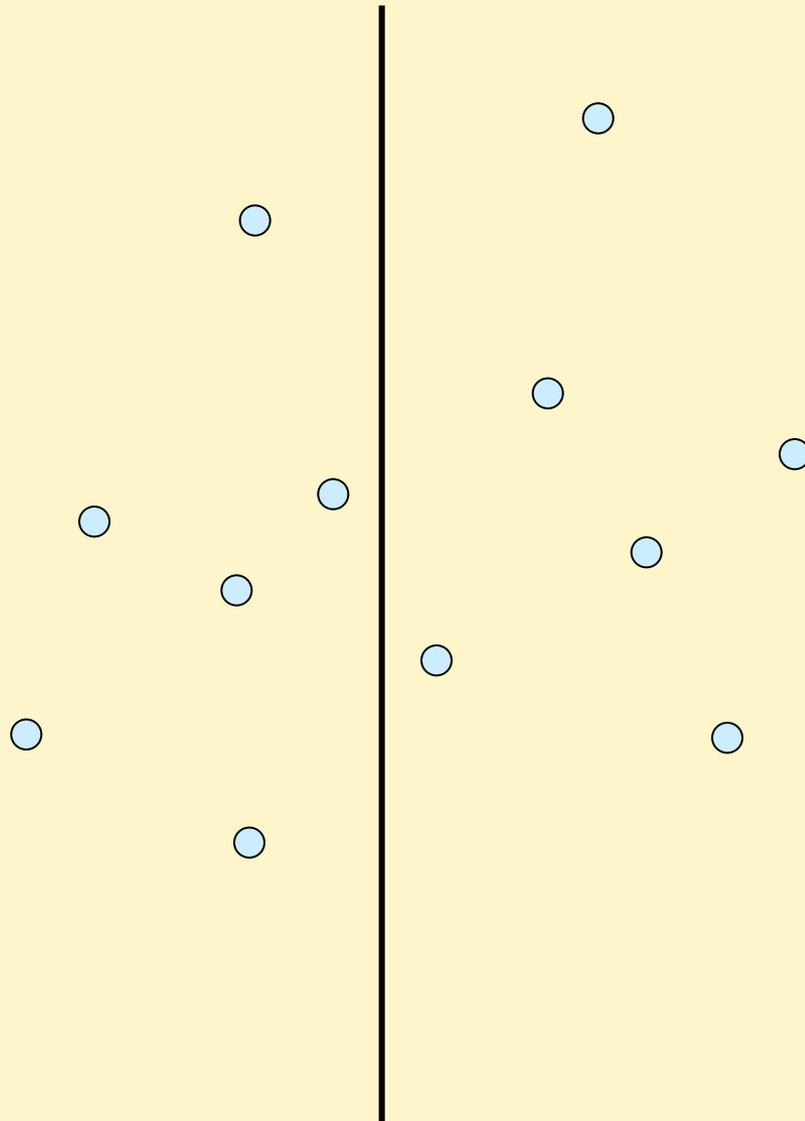
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



1) Dividir S en dos subconjuntos S_1 y S_2 de aproximadamente el mismo tamaño.

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

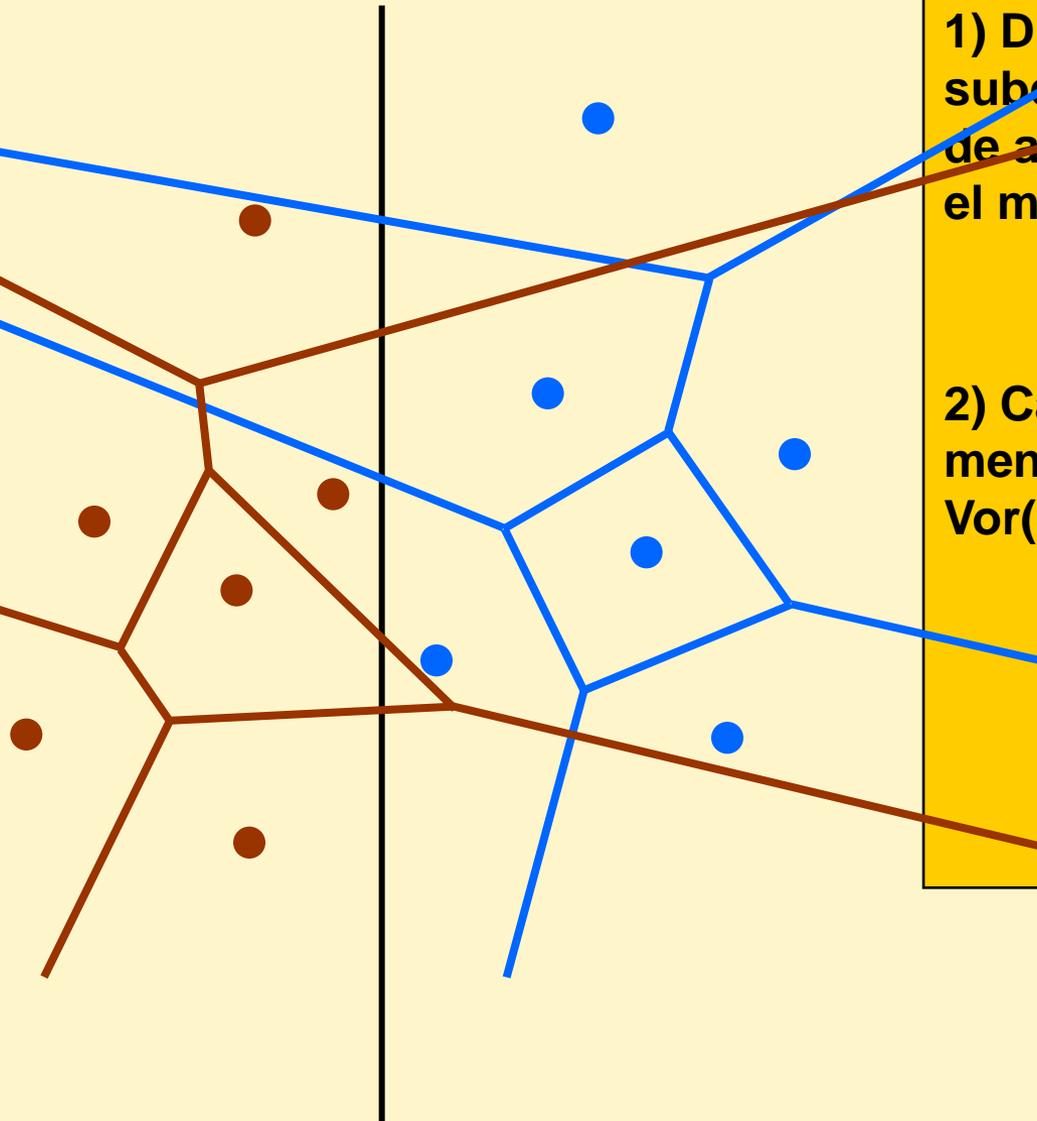
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



1) Dividir S en dos subconjuntos S_1 y S_2 de aproximadamente el mismo tamaño.

2) Calcular recursivamente los diagramas Vor(S_1) y Vor(S_2)

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

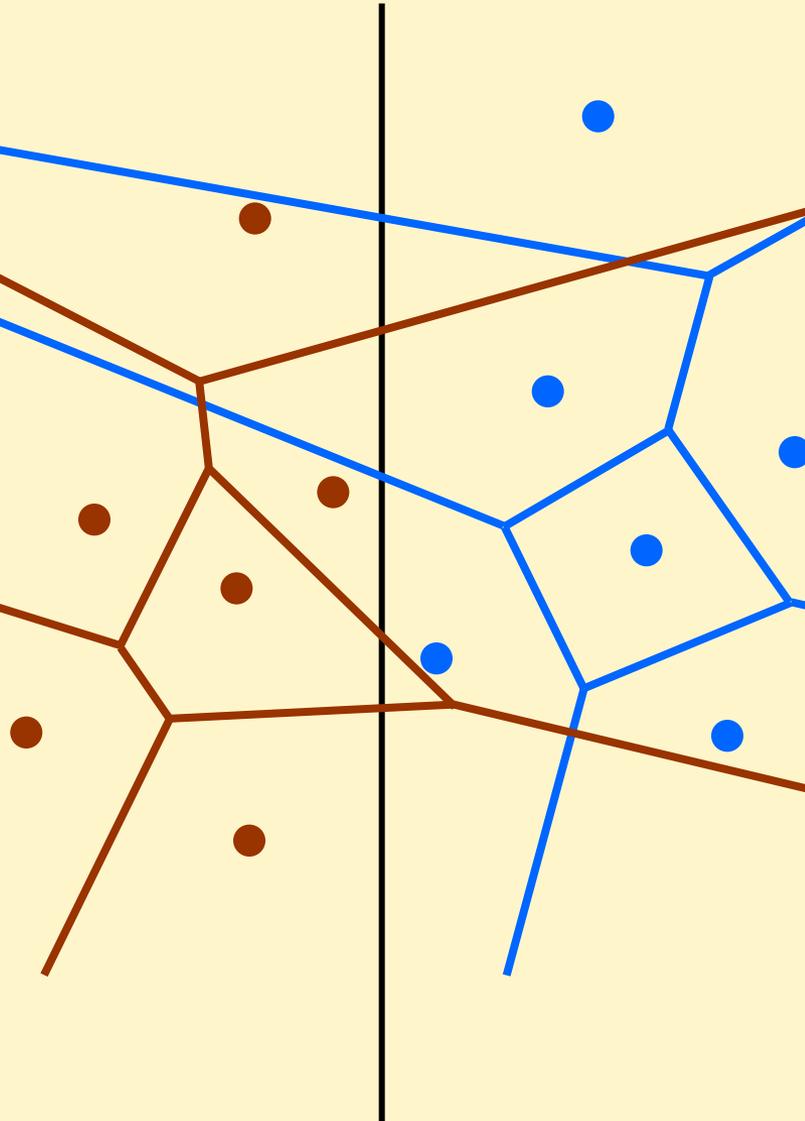
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



1) Dividir S en dos subconjuntos S_1 y S_2 de aproximadamente el mismo tamaño.

2) Calcular recursivamente los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$

3) Calcular $Vor(S)$, a partir de los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$, obtenidos en 2.

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

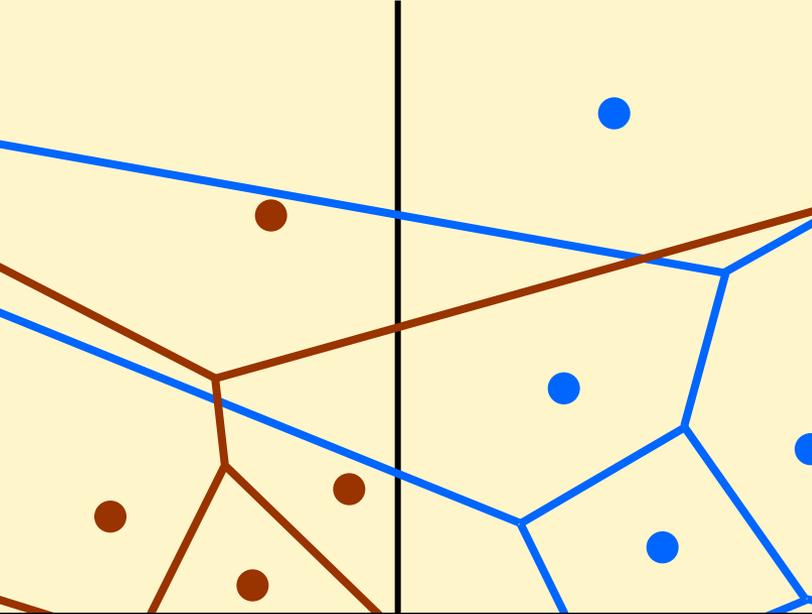
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



1) Dividir S en dos subconjuntos S_1 y S_2 de aproximadamente el mismo tamaño.

2) Calcular recursivamente los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$

3) Calcular $Vos(S)$, a partir de los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$, obtenidos en 2.

Lema: Si dos subconjuntos están separados por una línea vertical (S_1 a la izquierda y S_2 a la derecha), existe una línea poligonal monótona creciente c tal que todo punto q situado a la izquierda (derecha) de dicha poligonal está en la región de Voronoi de un punto de S_1 (S_2).

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

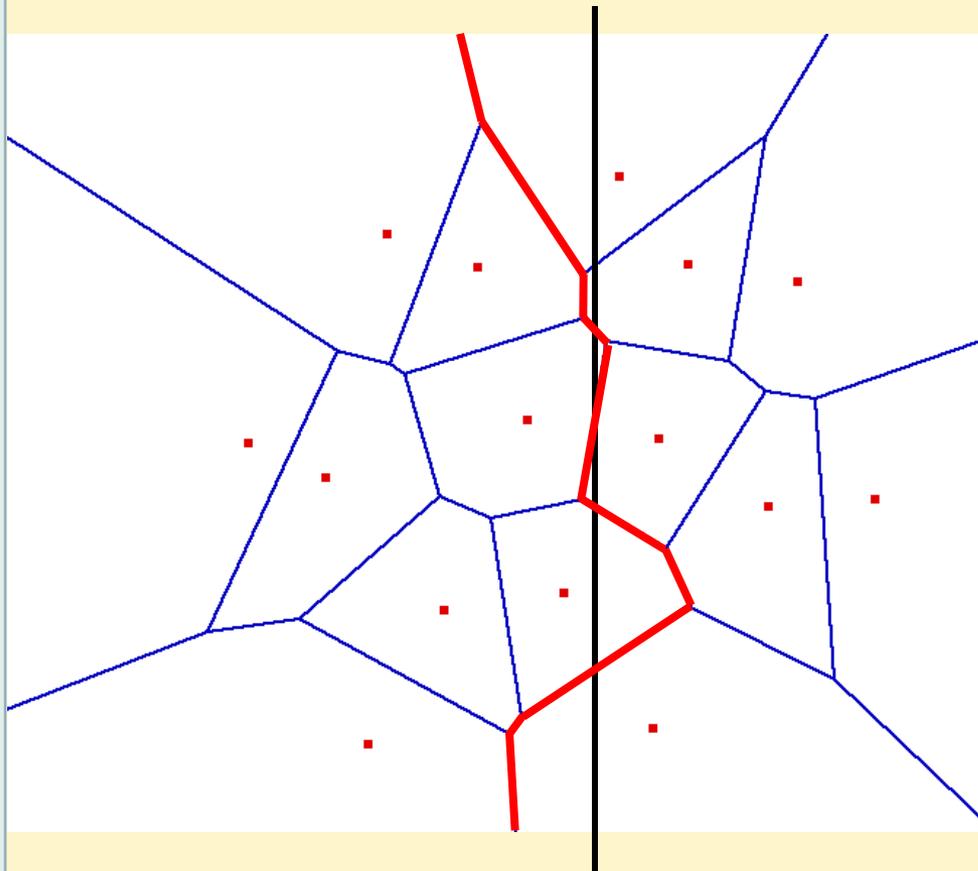
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Lema: Si dos subconjuntos están separados por una línea vertical (S_1 a la izquierda y S_2 a la derecha), existe una línea poligonal monótona creciente c tal que todo punto q situado a la izquierda (derecha) de dicha poligonal está en la región de Voronoi de un punto de S_1 (S_2).

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

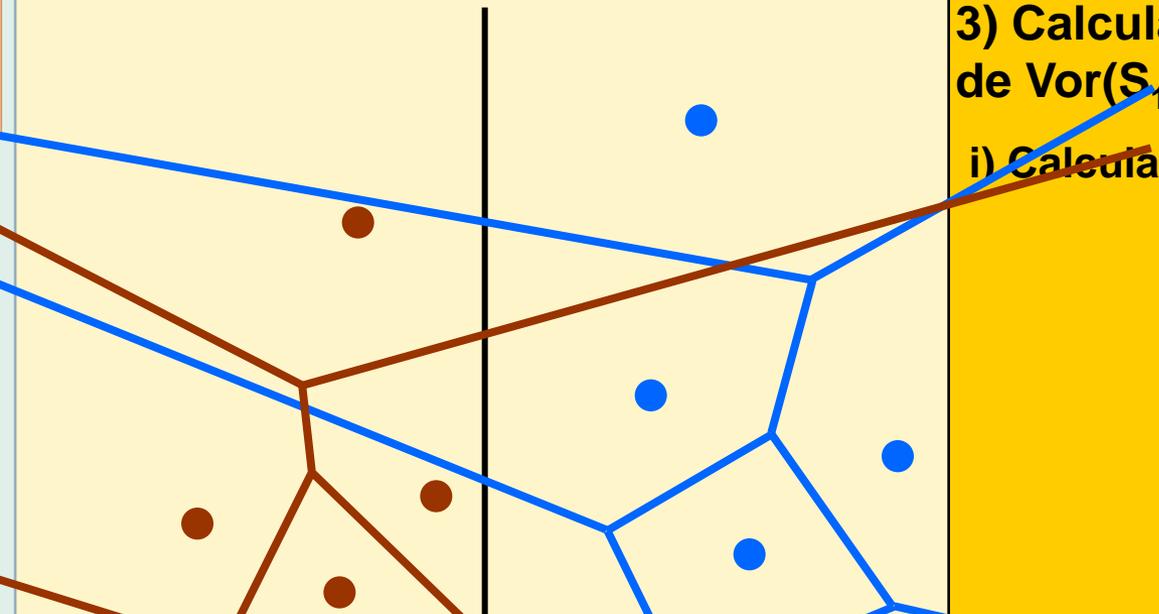
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



Lema: Si dos subconjuntos están separados por una línea vertical (S_1 a la izquierda y S_2 a la derecha), existe una línea poligonal monótona creciente c tal que todo punto q situado a la izquierda (derecha) de dicha poligonal está en la región de Voronoi de un punto de S_1 (S_2).

3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

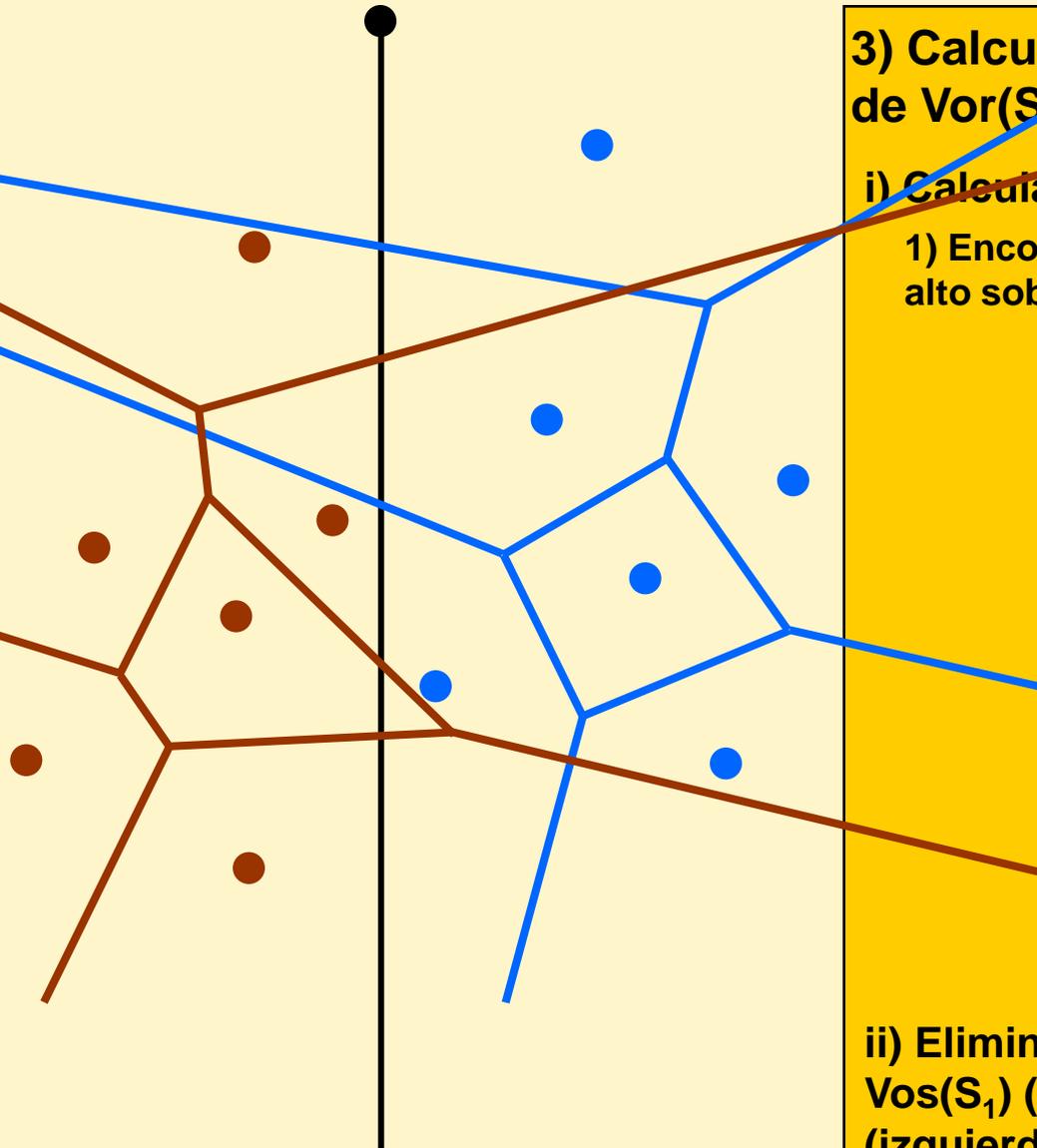
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

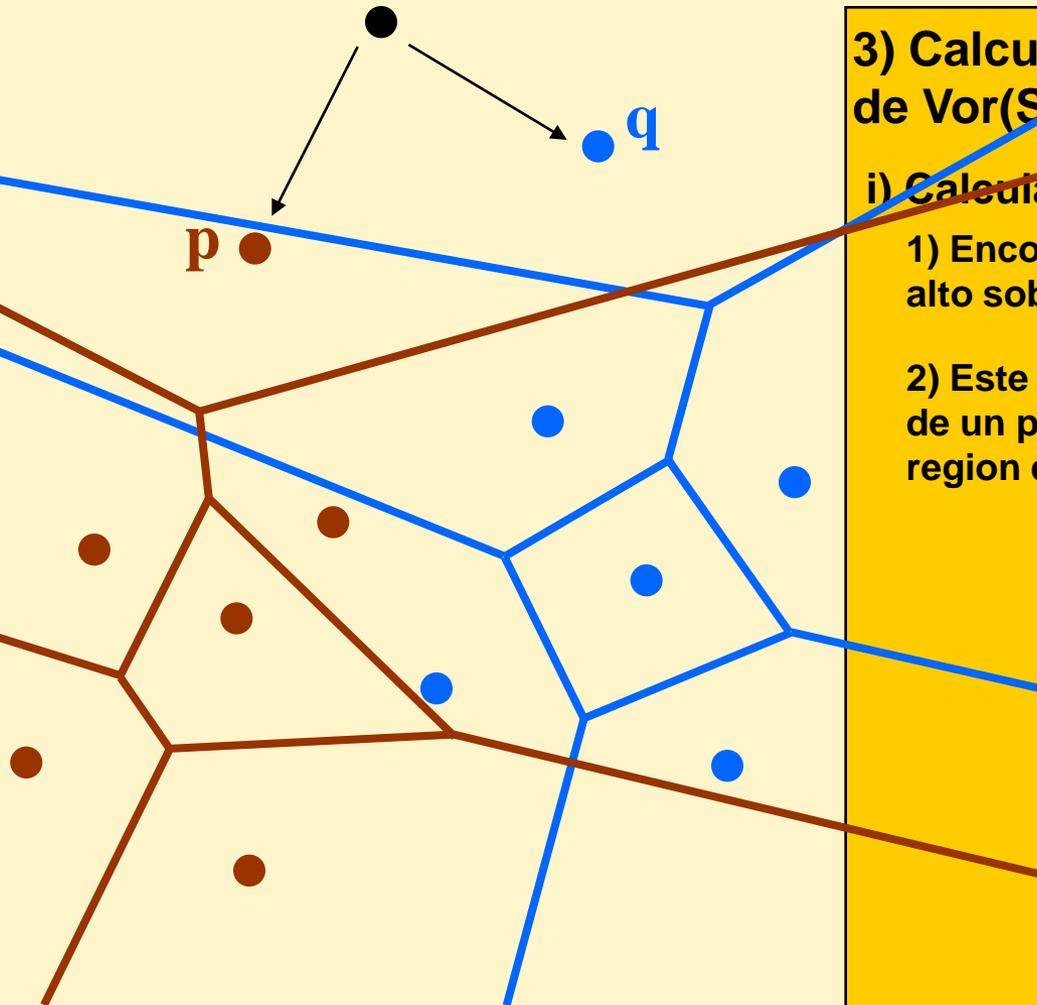
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

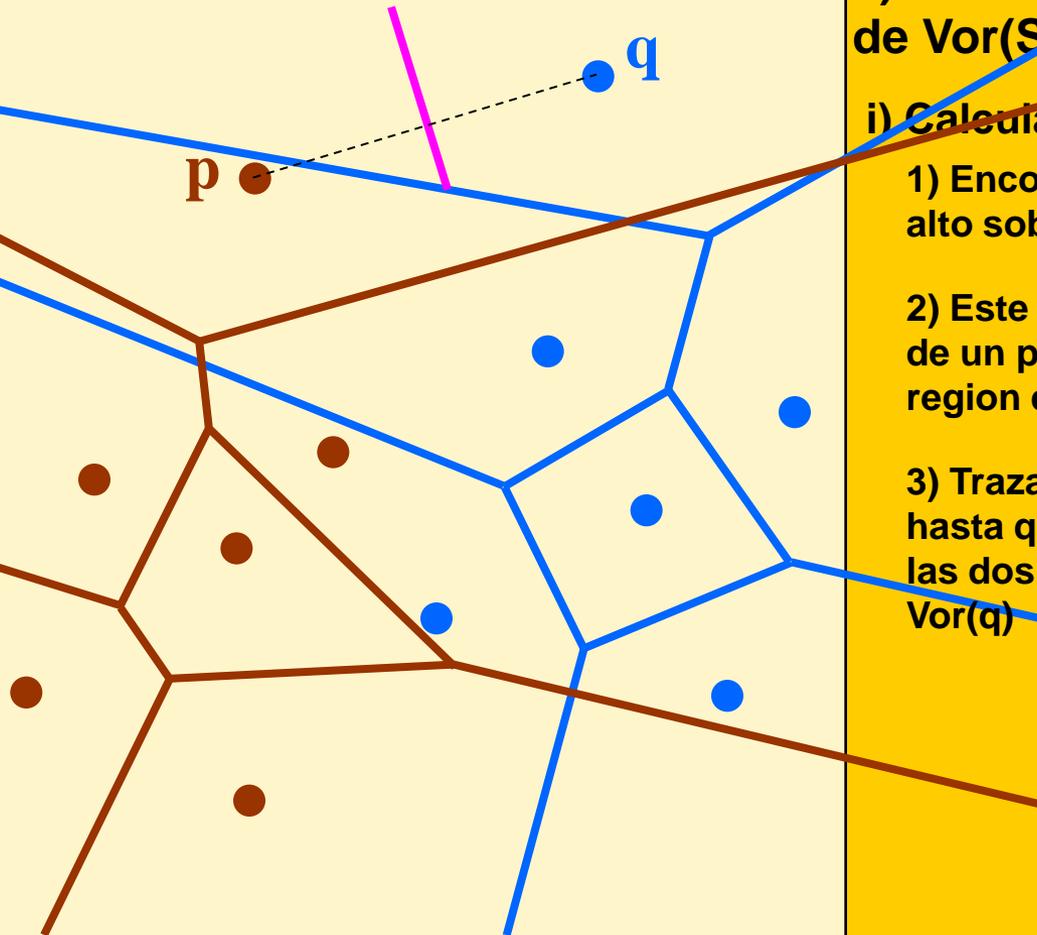
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la region de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

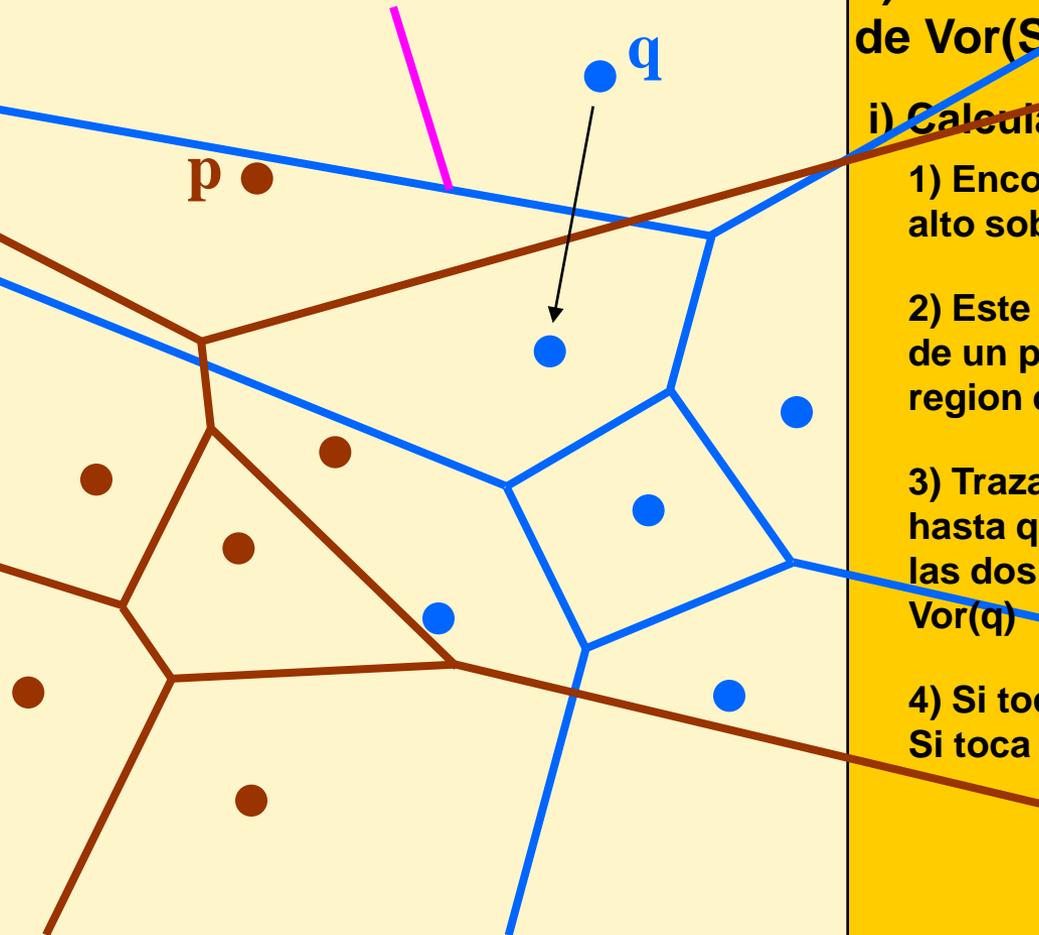
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

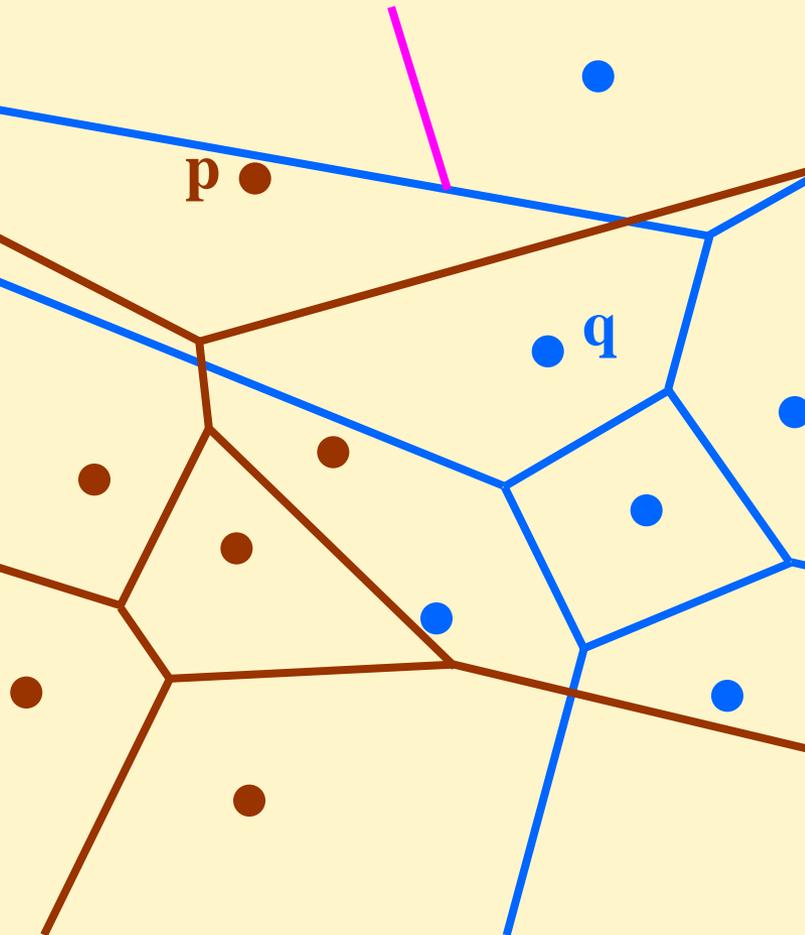
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

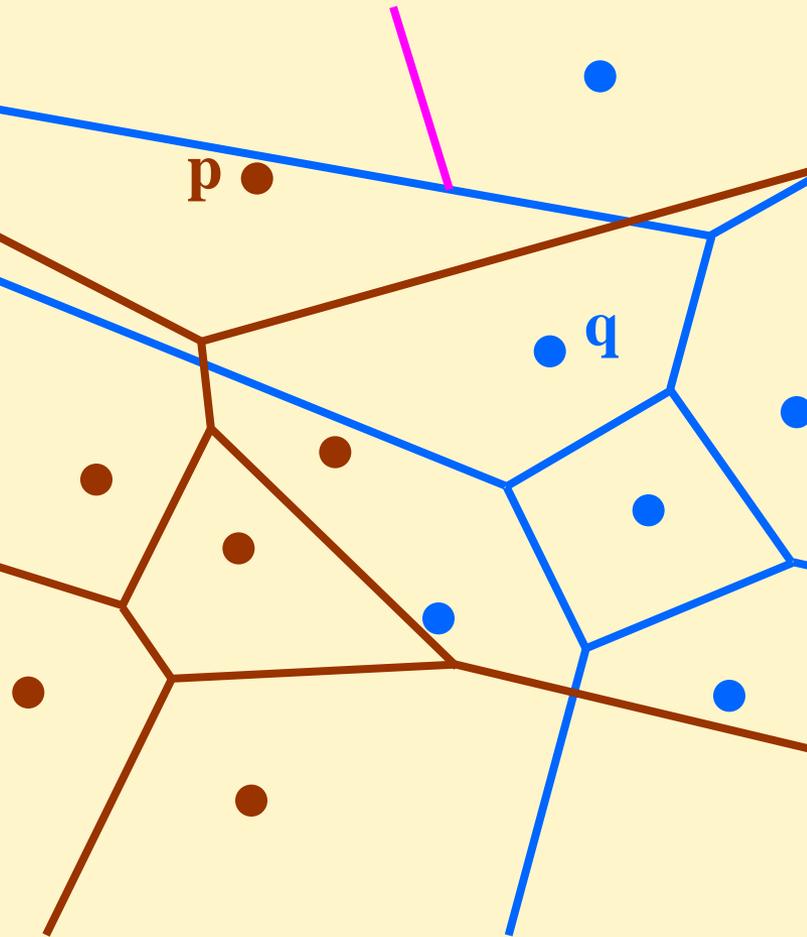
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c.

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la region de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p. Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q.

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c.

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

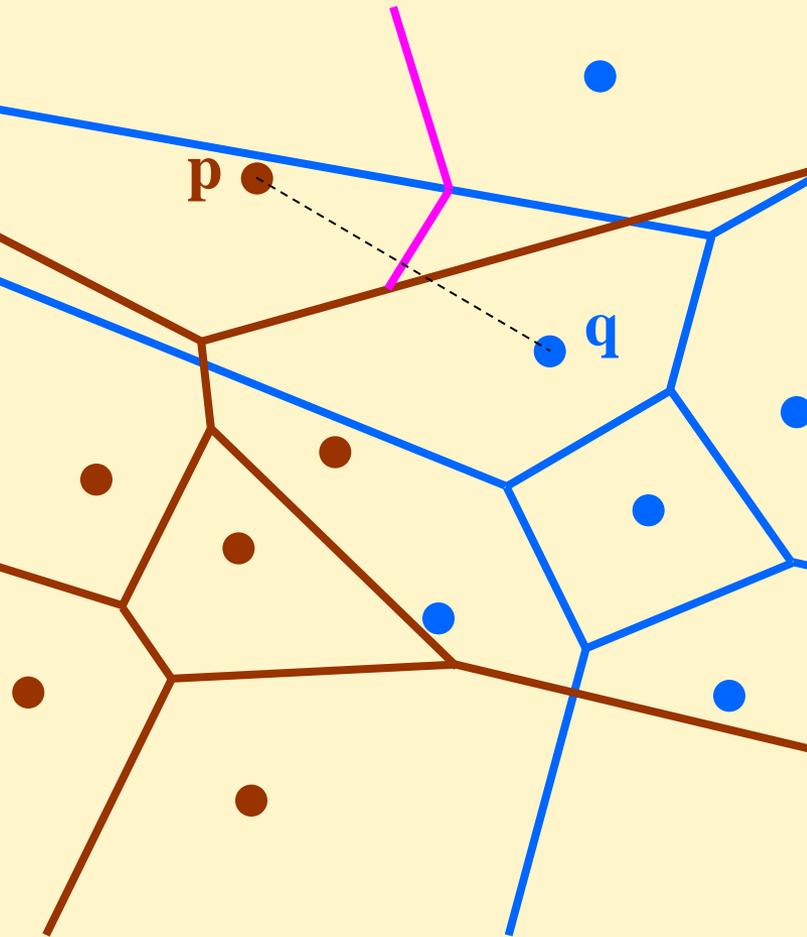
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

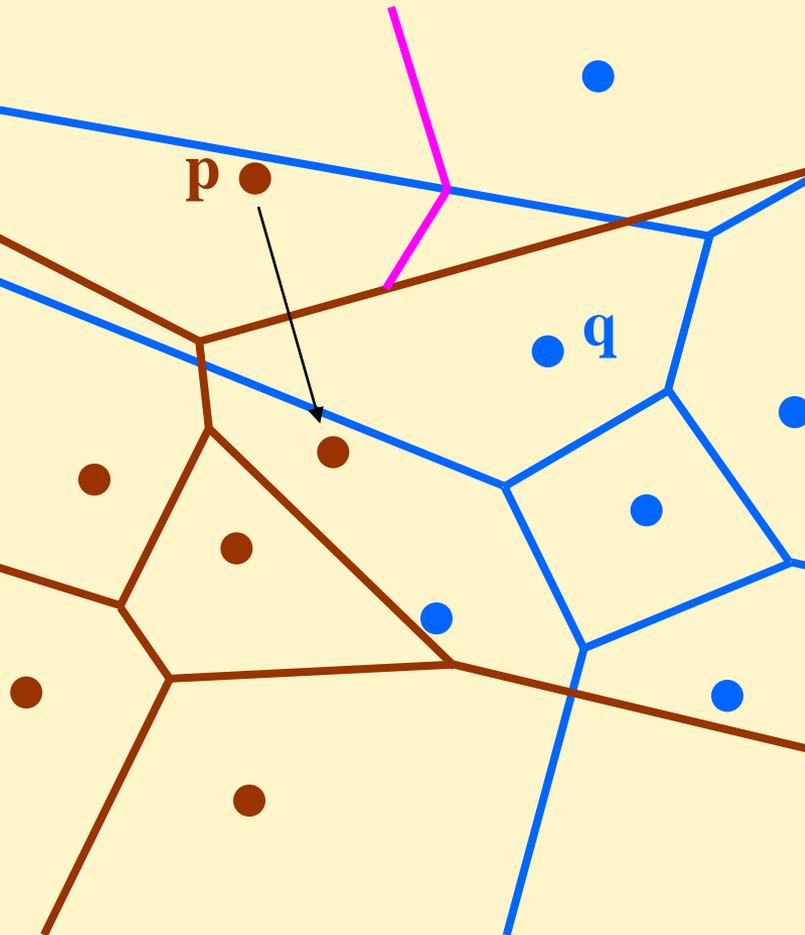
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la region de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vos(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

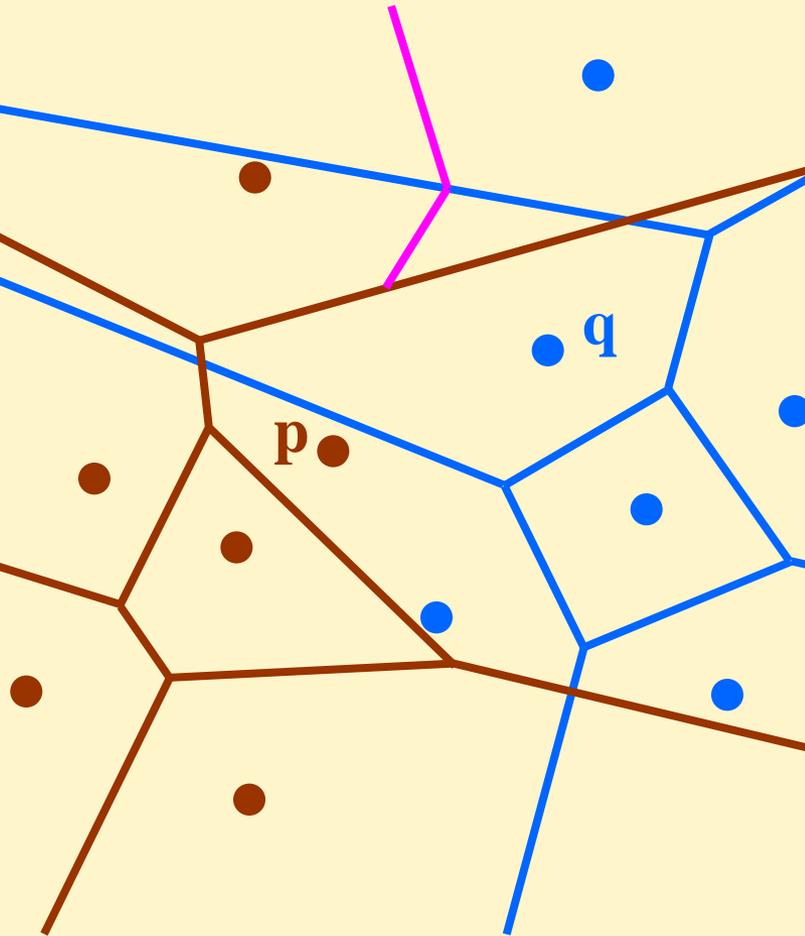
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c.

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la region de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p. Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q.

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c.

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

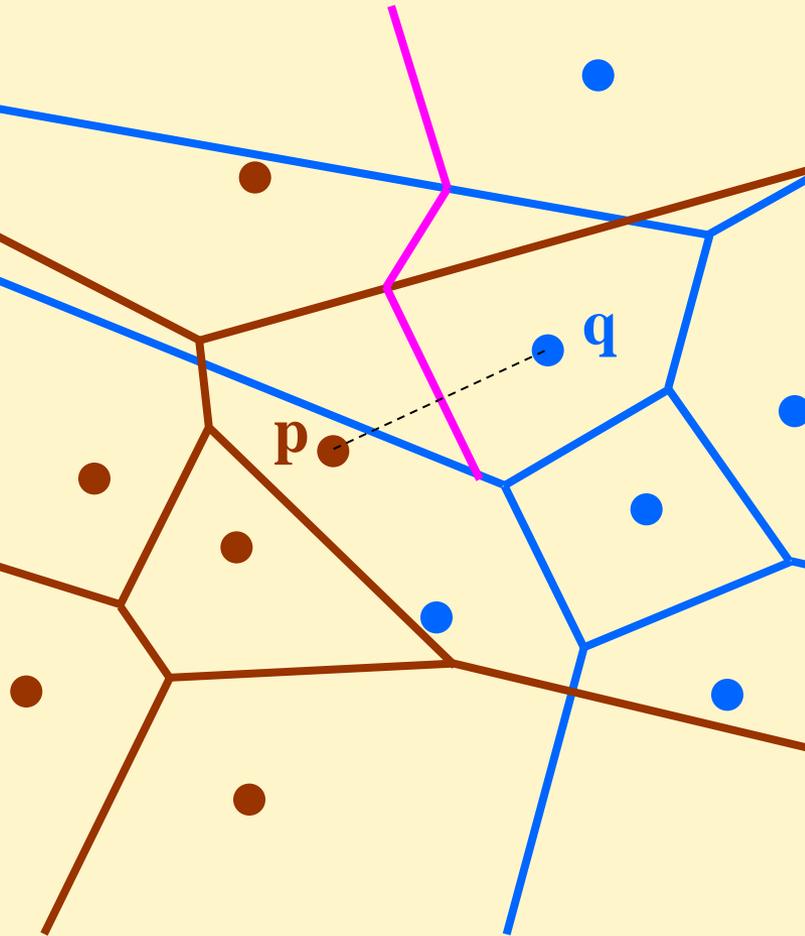
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

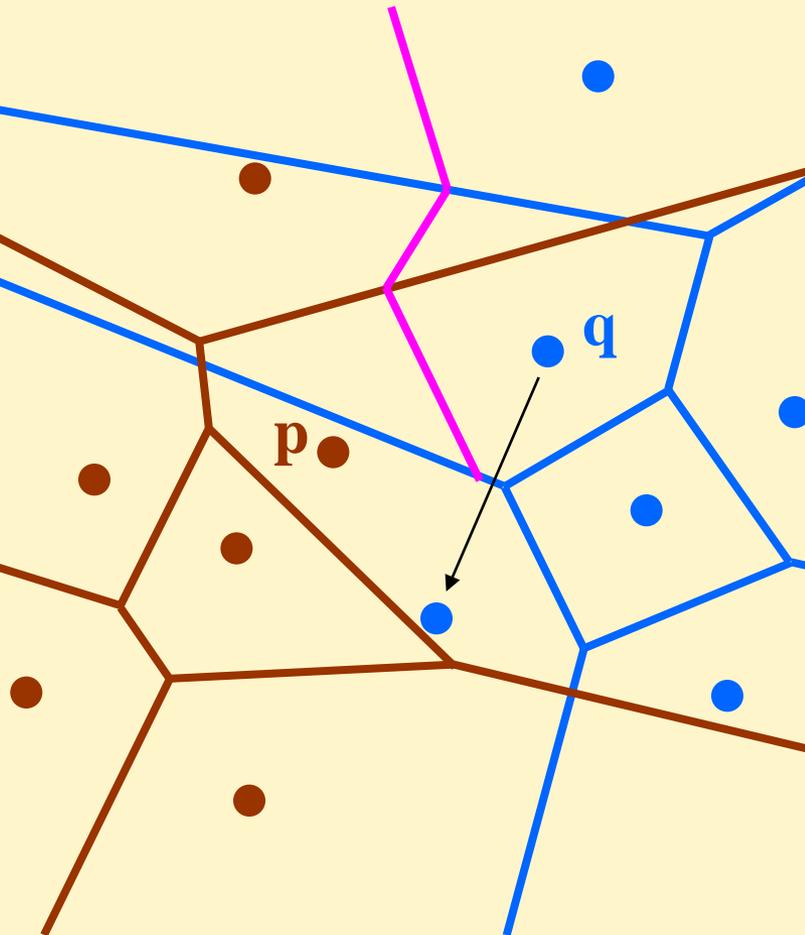
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

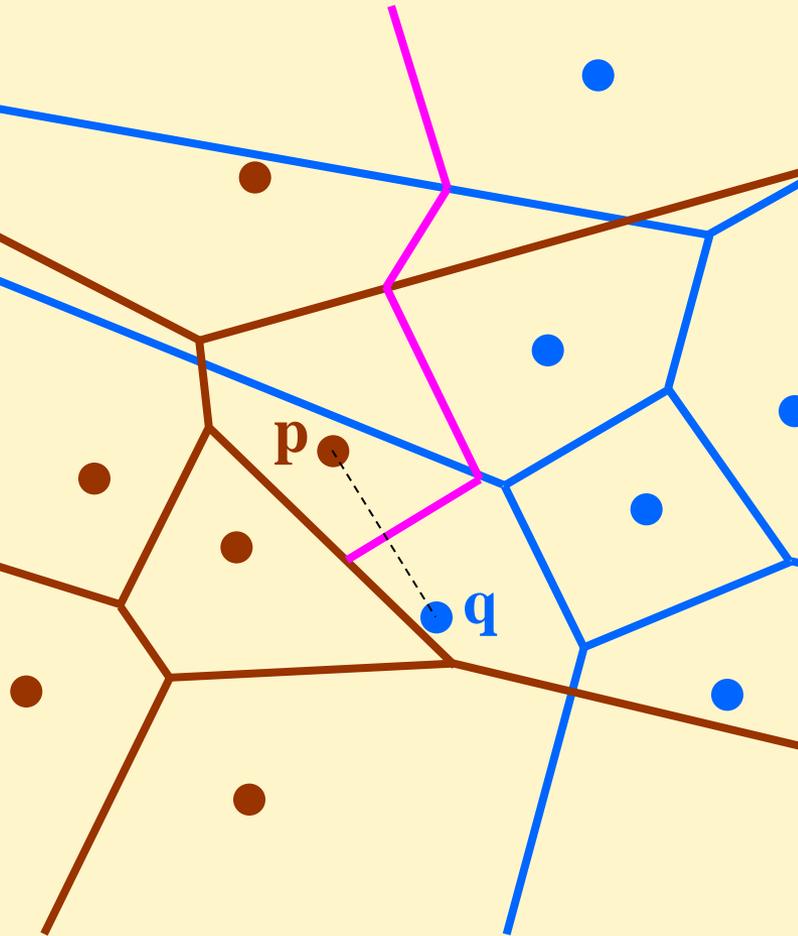
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

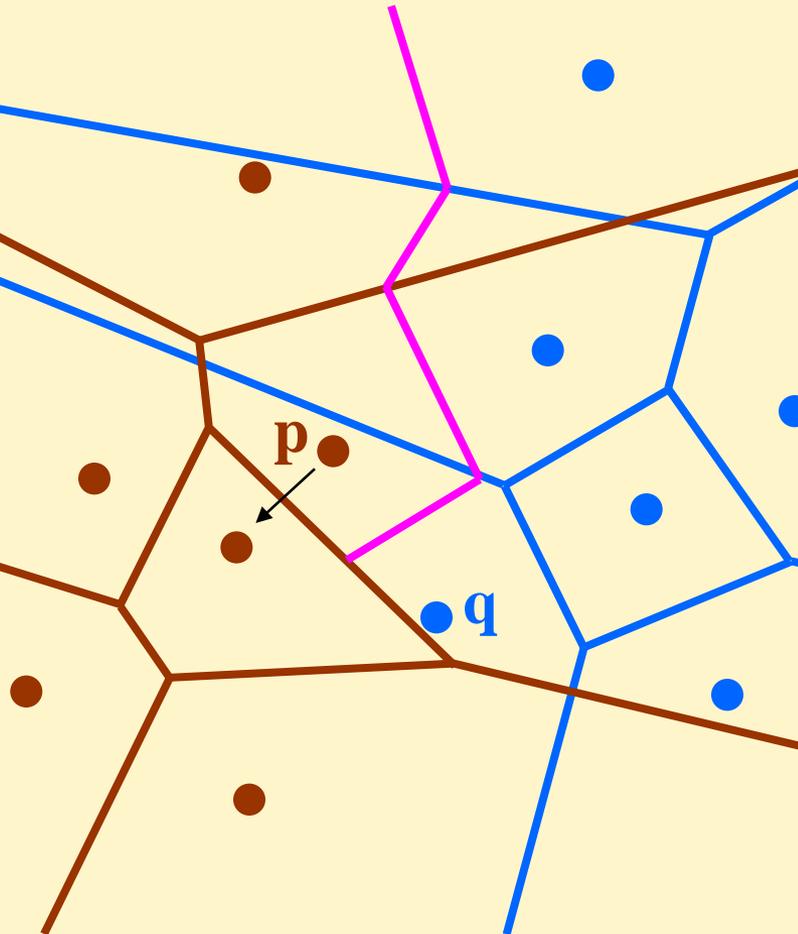
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

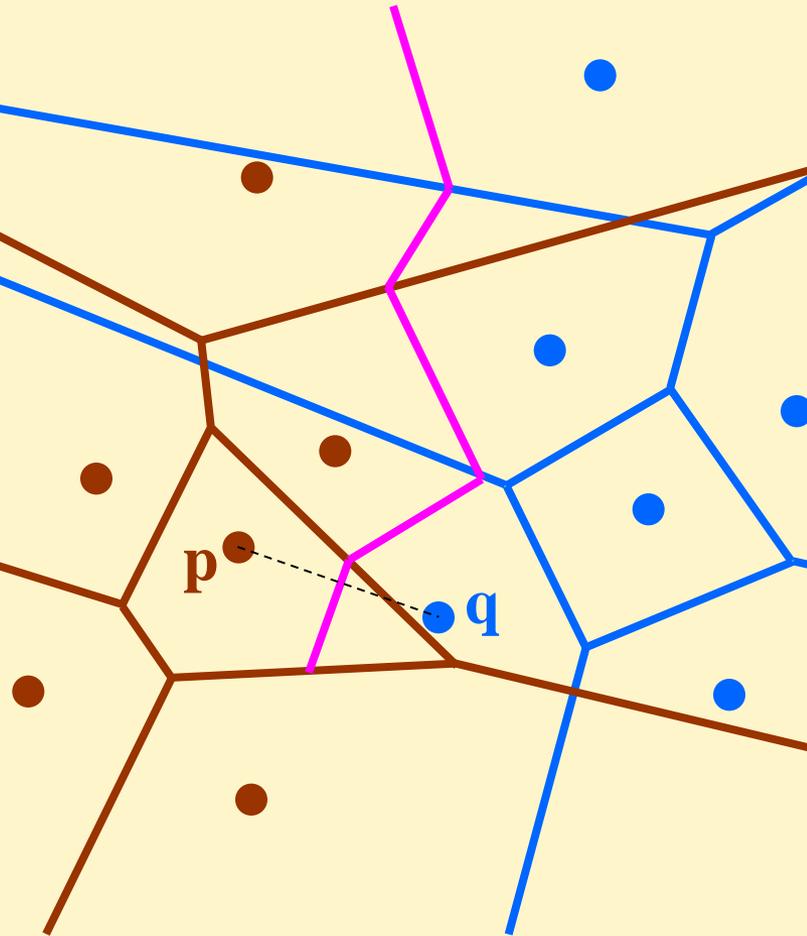
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

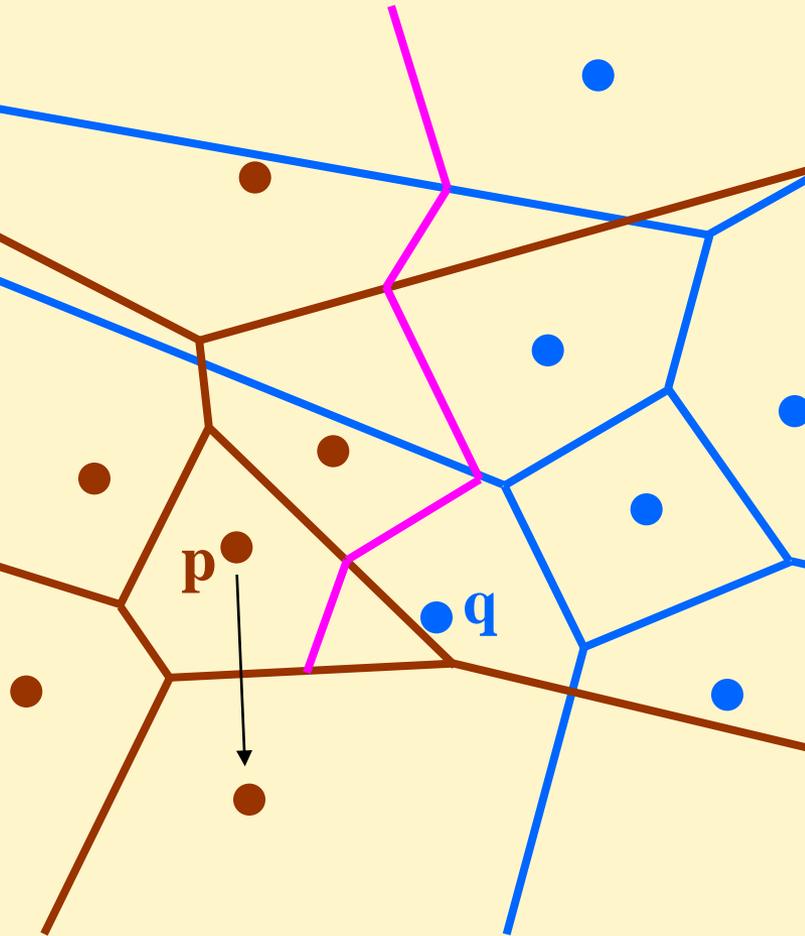
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c.

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c.

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

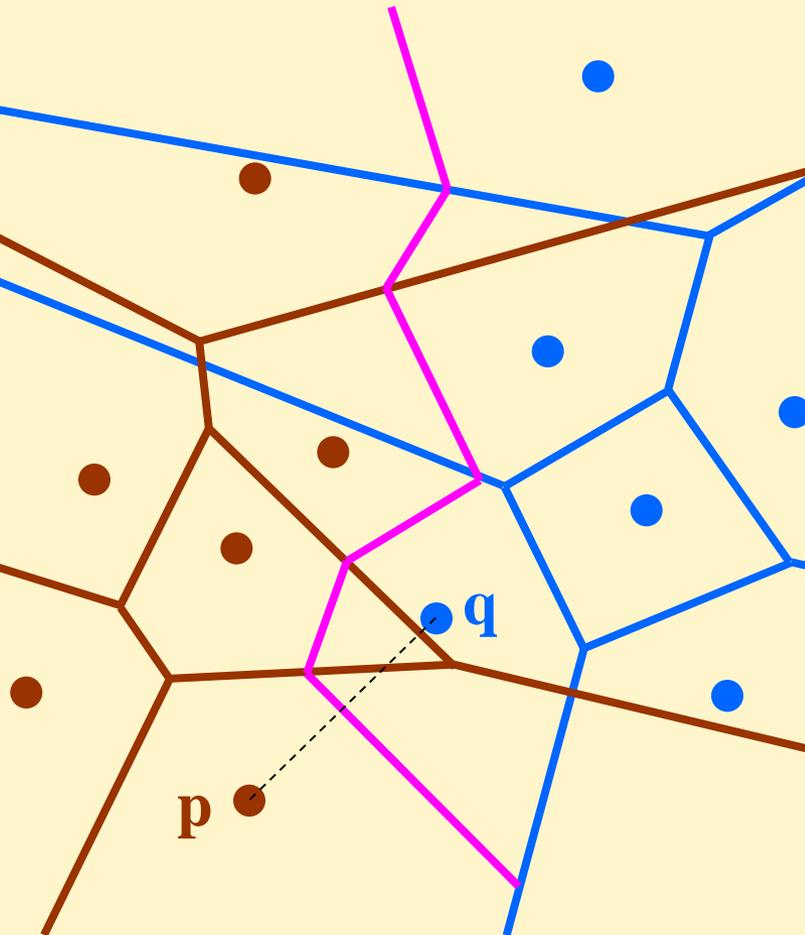
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

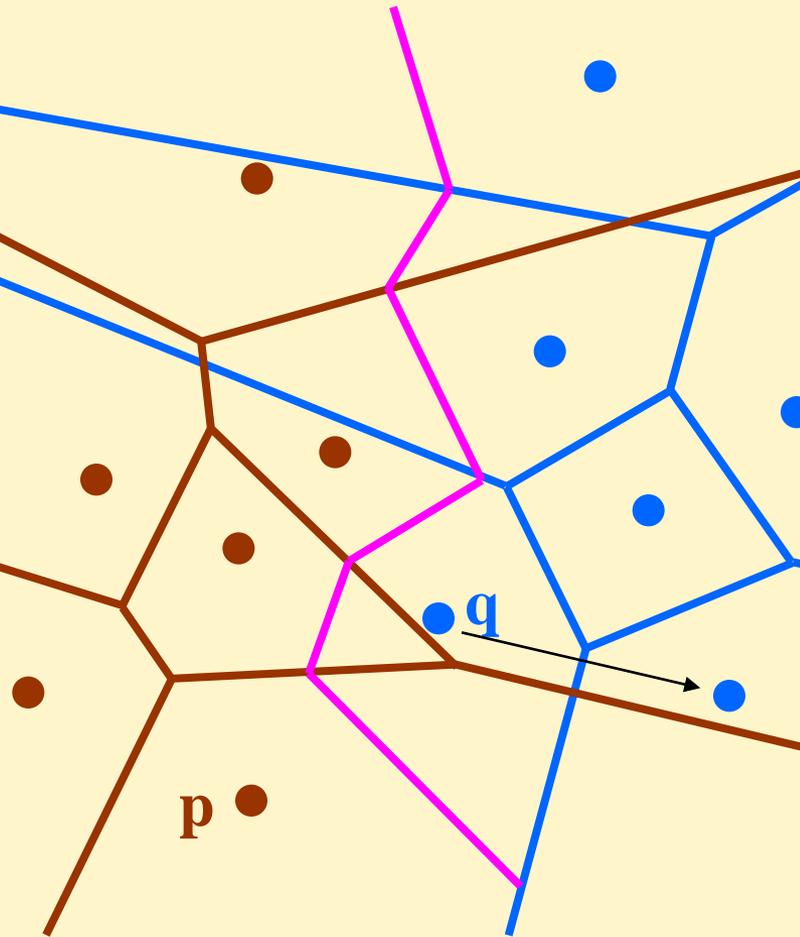
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

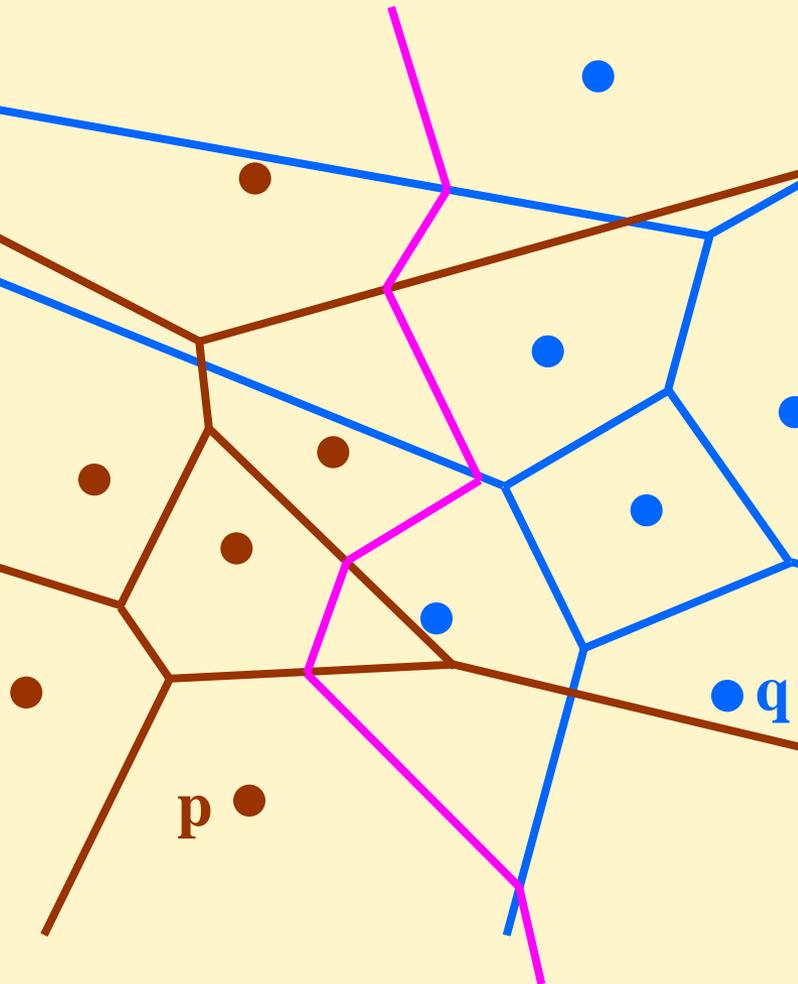
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

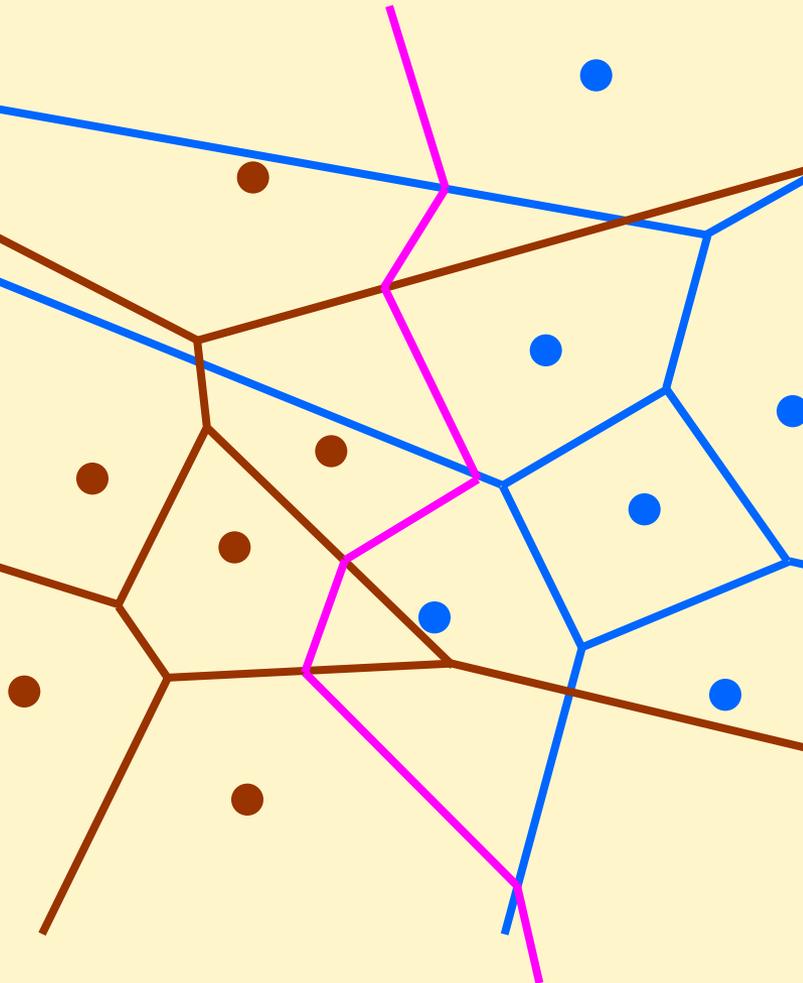
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

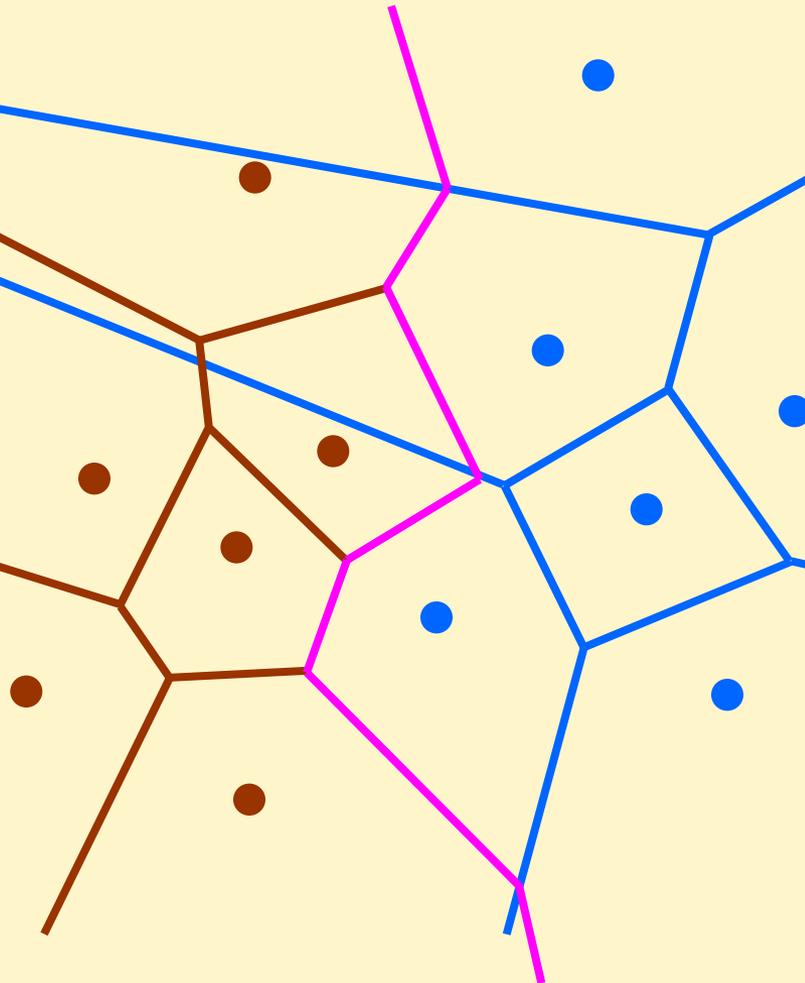
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $\text{Vor}(S)$, a partir de $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la region de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $\text{Vor}(p)$ o $\text{Vor}(q)$

4) Si toca a $\text{Vor}(p)$, actualizar p . Si toca a $\text{Vor}(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $\text{Vor}(S_1)$ ($\text{Vor}(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

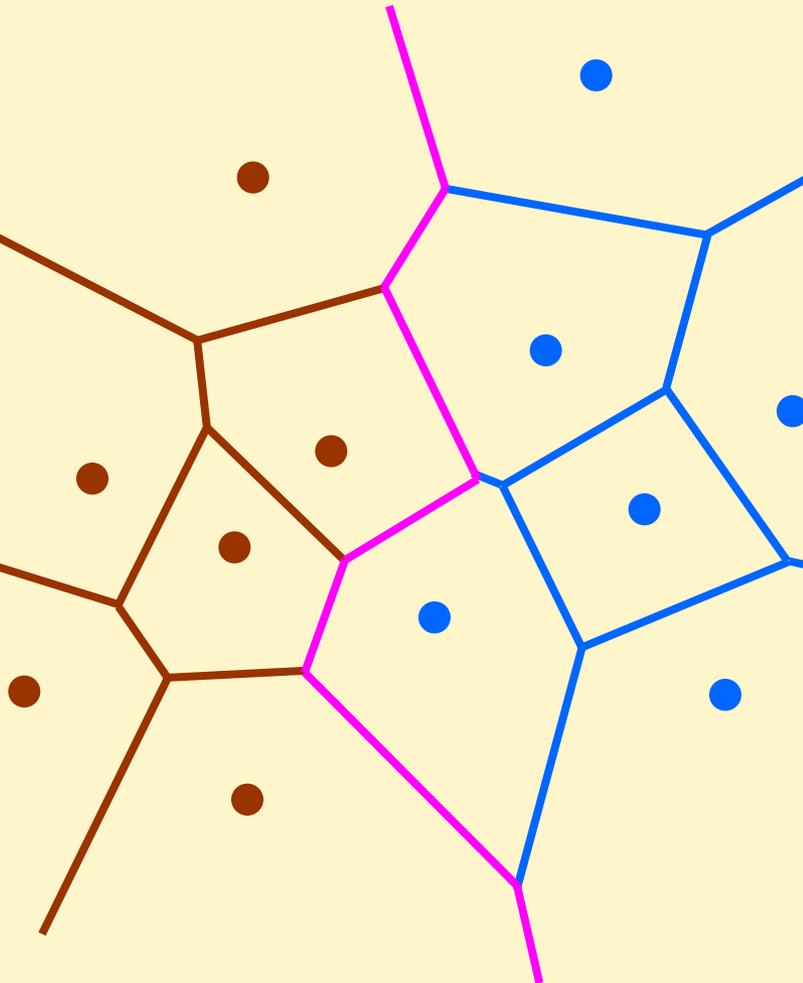
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

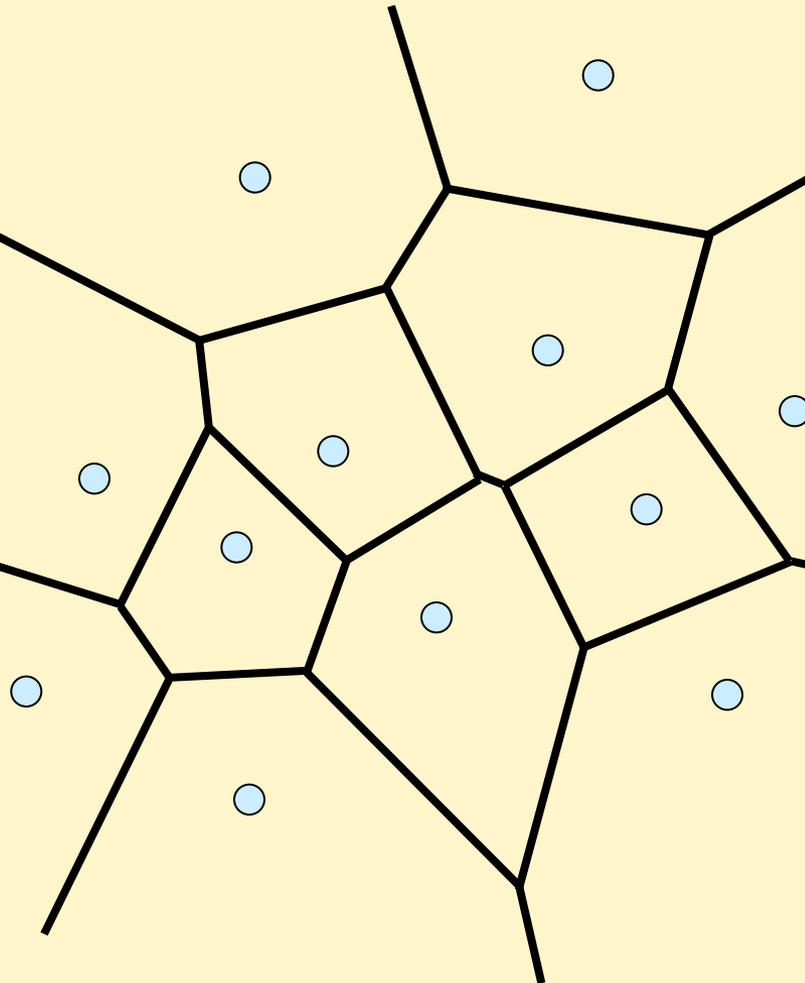
Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión



3) Calcular $Vor(S)$, a partir de $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$.

i) Calcular la poligonal c .

1) Encontrar un punto muy alto sobre la línea divisoria.

2) Este punto está en la región de un punto p de S_1 y en la región de un punto q de S_2 .

3) Trazar la mediatriz de pq hasta que toque a alguna de las dos regiones $Vor(p)$ o $Vor(q)$.

4) Si toca a $Vor(p)$, actualizar p . Si toca a $Vor(q)$, actualizar q .

5) Volver al paso 3

ii) Eliminar las líneas de $Vor(S_1)$ ($Vor(S_2)$) a la derecha (izquierda) de c .

Algoritmo Divide y Vencerás

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

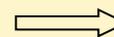
$$\begin{array}{c}
 T(n) \\
 = \\
 2 T(n/2) \\
 + \\
 O(n)
 \end{array}$$

1) Dividir S en dos subconjuntos S_1 y S_2 de aproximadamente el mismo tamaño.

2) Calcular recursivamente los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$

3) Calcular $Vos(S)$, a partir de los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$, obtenidos en 2.

$$T(n) = 2 T(n/2) + O(n)$$



$$T(n) \in O(n \lg n)$$

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Algoritmo Divide y Vencerás

Teorema: El método de divide y vencerás calcula el diagrama de Voronoi de n puntos en el plano en tiempo $O(n \log n)$.

(este tiempo es óptimo)

1) Dividir S en dos subconjuntos S_1 y S_2 de aproximadamente el mismo tamaño.

2) Calcular recursivamente los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$

3) Calcular $Vos(S)$, a partir de los diagramas $Vor(S_1)$ y $Vor(S_2)$, obtenidos en 2.

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Algoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

Algoritmo de Fortune

<http://www.ams.org/featurecolumn/archive/voronoi.html>

<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/voronoi/applet/voronoi-jar.html>

Voronoi y la envolvente convexa

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

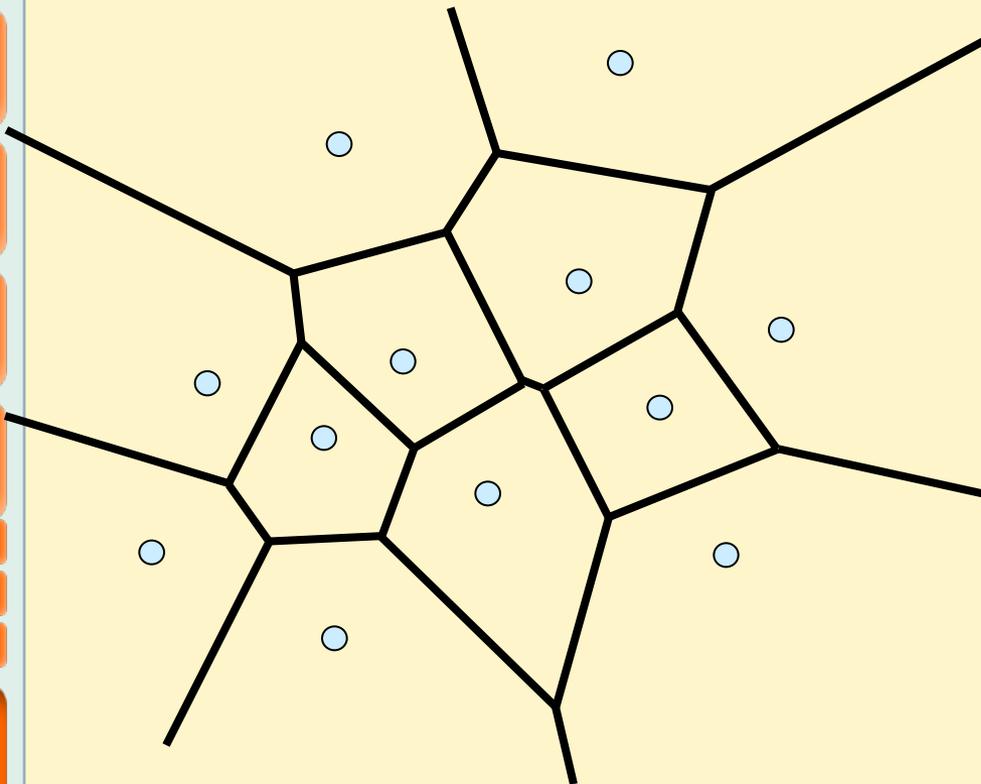
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

A partir del diagrama de Voronoi podemos calcular la envolvente convexa.



Los vértices de la envolvente son los generadores con región de Voronoi no acotada.

Voronoi y la envolvente convexa

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

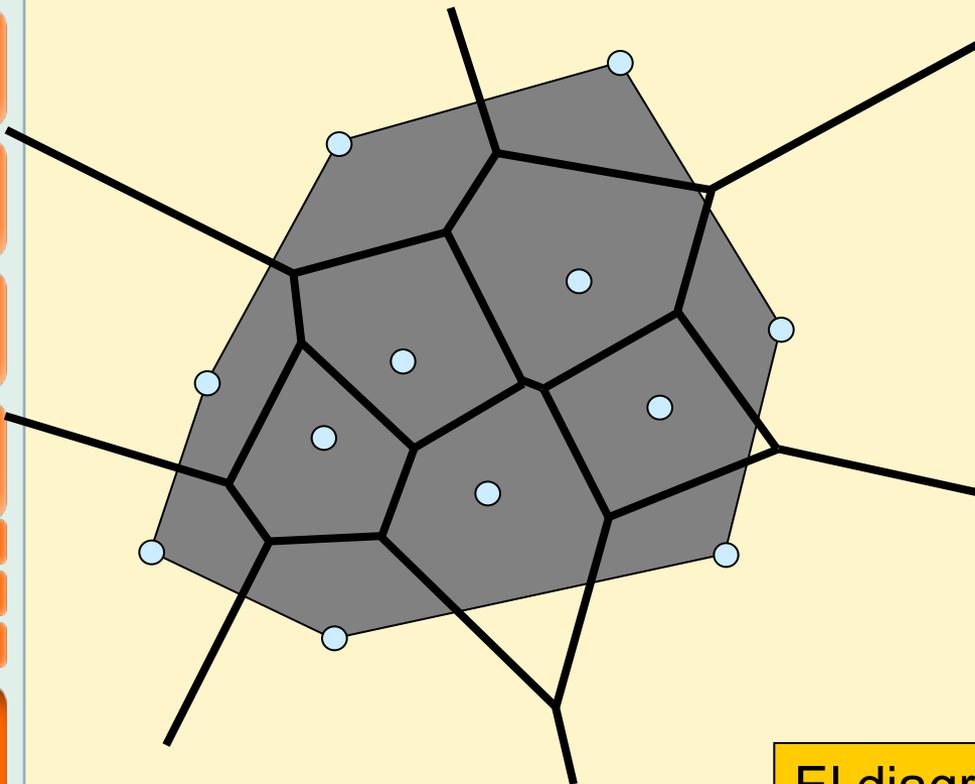
Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

A partir del diagrama de Voronoi podemos calcular la envolvente convexa.



Los vértices de la envolvente son los generadores con región de Voronoi no acotada.

Construir la envolvente a partir del diagrama de Voronoi cuesta $O(n)$.

El diagrama de Voronoi puede construirse en tiempo *óptimo* $O(n \log n)$.

Ejercicios

Tema 3
Diagrama de
Voronoi

Introducción

Historia
Aplicaciones

Propiedades

Allgoritmos

Incremental

Divide y vencerás

Fortune

Envolvente
convexa

Fundamentos de
Geometría
Computacional
I.T.I. Gestión

1.- Describir las mediatrices (el conjunto de puntos que equidistan) de:
Un punto y una recta
Dos rectas
Un punto y un segmento
Dos segmentos

2.- Dados dos conjuntos de puntos A y B, cada uno de ellos con N puntos, encontrar el mínimo de la distancia de un punto de A a uno de B.

3.- Algunas de las métricas más usuales, además de la euclídea son las siguientes:

$$d1((x1,y1),(x2,y2))= |x1-x2| + |y1-y2| \quad \text{y} \quad dw((x1,y1),(x2,y2))= \max\{|x1-x2|, |y1-y2|\}$$

Construir el diagrama de Voronoi de tres puntos con estas métricas.

4.- Dado un conjunto S de puntos en el plano, para cada punto p de S definimos su región de Voronoi de los puntos más alejados como el lugar geométrico de los puntos del plano que están más alejados de p que de ningún otro punto de S. Diseñar un algoritmo que calcule el diagrama de Voronoi de los puntos más alejados de S.

<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/tfcs/fvd/home.html>