

Tema 3: PROCESAMIENTO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1

INGENIERÍA INFORMÁTICA



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



2

- Dominio espacial

Se refiere a la imagen en sí misma. Los métodos en esta categoría están basados en la manipulación directa de los píxeles de la imagen.

- Dominio de la frecuencia

El procesamiento de la imagen se lleva a cabo en una **transformada de la imagen** (Transformada de Fourier) y, posteriormente, mediante la transformada inversa se obtienen los resultados.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



3

- **Transformadas de la imagen:**

Sea $f(x,y)$ imagen $N \times N$, una transformada (lineal, reversible) se expresa por:

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) g(x, y, u, v)$$

donde:

- $T(u, v)$ es la transformada de $f(x, y)$,
- $g(x, y, u, v)$ es el núcleo de la transformada directa,
- u y v toman valores de 0 a $N-1$.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



4

- **Transformadas de la imagen:**

Sea $f(x,y)$ imagen $N \times N$, $T(u,v)$ su transformada. La transformada inversa viene dada por:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) h(x, y, u, v)$$

donde:

- $h(x, y, u, v)$ es el núcleo de la transformada inversa.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



5

- **Transformadas de la imagen:**

- El núcleo directo es **separable** si $g(x, y, u, v) = g_1(x, u) g_2(y, v)$.

$$\begin{aligned} \text{Luego, } T(u, v) &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) g_1(x, u) g_2(y, v) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \left(\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) g_2(y, v) \right) g_1(x, u) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} T(x, v) g_1(x, u) \end{aligned}$$

Entonces, la transformada bidimensional se puede calcular realizando dos transformadas unidimensionales.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



6

- **Transformadas de la imagen:**

- El núcleo directo es **simétrico** si $g(x, y, u, v) = g_1(x, u) g_2(y, v)$, tal que $g_1(x, u) = g_2(y, v)$.

Luego,

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \left(\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) g(y, v) \right) g(x, u)$$

En ese caso, la transformada bidimensional se puede calcular realizando dos transformadas unidimensionales iguales, una por filas y otra por columnas .

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



7

- **Transformadas de la imagen: Expresión matricial**

- Si el núcleo es simétrico y separable, la transformada de la imagen se puede representar matricialmente de la siguiente forma:

$$(F)_{i,j} = f(i, j), \quad (G)_{i,j} = g(i, j), \quad (T)_{i,j} = T(i, j)$$

$$T = G^T F G$$



$$F = (G^{-1})^T T G^{-1}$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



8

• Transformadas de la imagen: EJEMPLOS

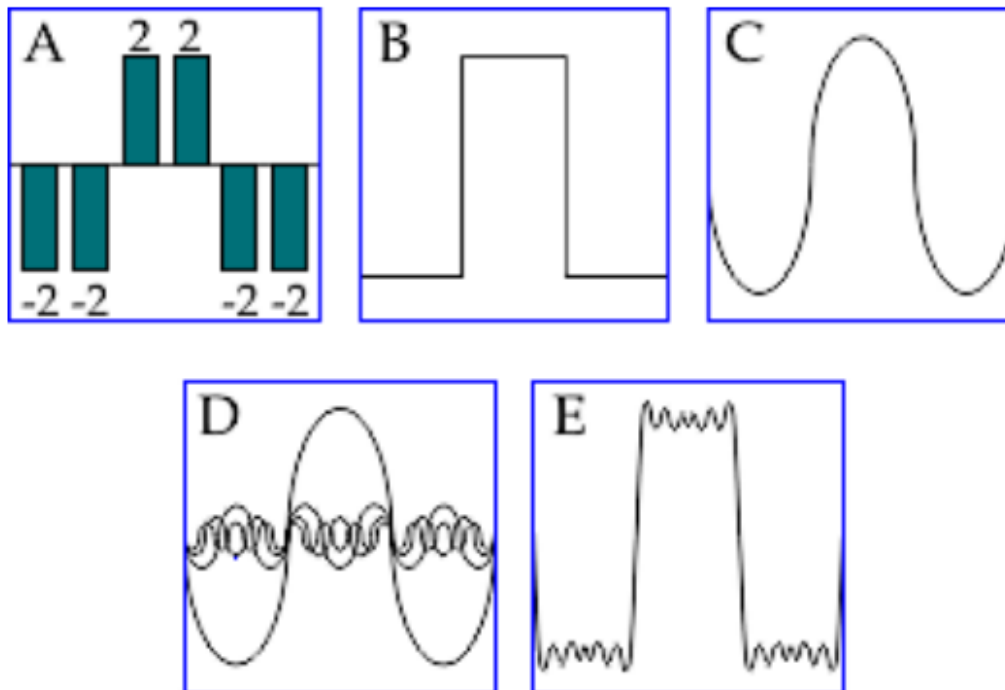
- La transformada de Fourier  Técnicas de filtrado en el dominio de la frecuencia
- La transformada discreta del coseno  Estándar de **compresión JPEG.**
- La transformada de Walsh-Hadamard

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



9

- **La transformada de Fourier:**



La oscilación sobre un valor medio (A) puede representarse por una forma lineal (B) y ésta puede reproducirse como una suma de ondas. La onda (C) describe la forma (B) mucho peor que las cinco ondas del gráfico (D) que vemos sumadas en (E).

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



10

- **Transformada de Fourier continua:**

- La transformada de Fourier de una función continua e integrable de una variable real x se define como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

- Observemos que se trata de una función compleja

$$F(u) = R(u) + I(u)i,$$

donde $R(u)$ e $I(u)$ son la parte real e imaginaria de $F(u)$, respectivamente.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



11

- **Transformada de Fourier continua:**

- La transformada de Fourier de una función continua e integrable de una variable real x se define como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

- Variable u = variable de frecuencia
- Módulo de $F(u)$, $|F(u)| = (R(u)^2 + I(u)^2)^{1/2}$ = **espectro de Fourier.**
- $|F(u)|^2$ = espectro de potencias ó densidad espectral de $f(x)$.
- Ángulo $P(u) = \arctg(I(u)/R(u))$ = **fase.**

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



12

- **Transformada de Fourier continua:**

- La transformada de Fourier de una función continua e integrable de una variable real x se define como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iux} dx$$

- La transformada inversa se define como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi iux} dx$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



13

- **Transformada de Fourier continua:**

- La transformada de Fourier de una función continua e integrable de dos variables reales se define como:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy$$

- La transformada inversa se define como:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} dx$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



14

- **Transformada de Fourier discreta:**

- Sea $f(x,y)$ una imagen $N \times N$ en niveles de grises. La transformada discreta de Fourier de la imagen consiste en una función $F(u,v)$ tal que $u = 0,1,\dots,N-1$ y $v = 0,1,\dots,N-1$:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)/N}$$

- La inversa se define como:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)/N}$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



15

- **Transformada de Fourier discreta:**

- Núcleo directo:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)/N} \quad \longrightarrow \quad g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} e^{-2\pi i(ux+vy)/N}$$

-Núcleo inverso:

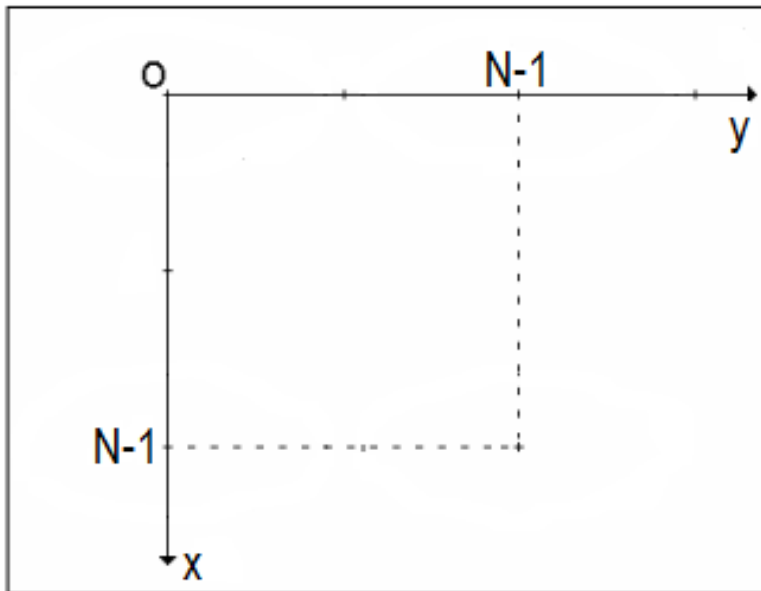
$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)/N} \quad \longrightarrow \quad h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} e^{2\pi i(ux+vy)/N}$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia

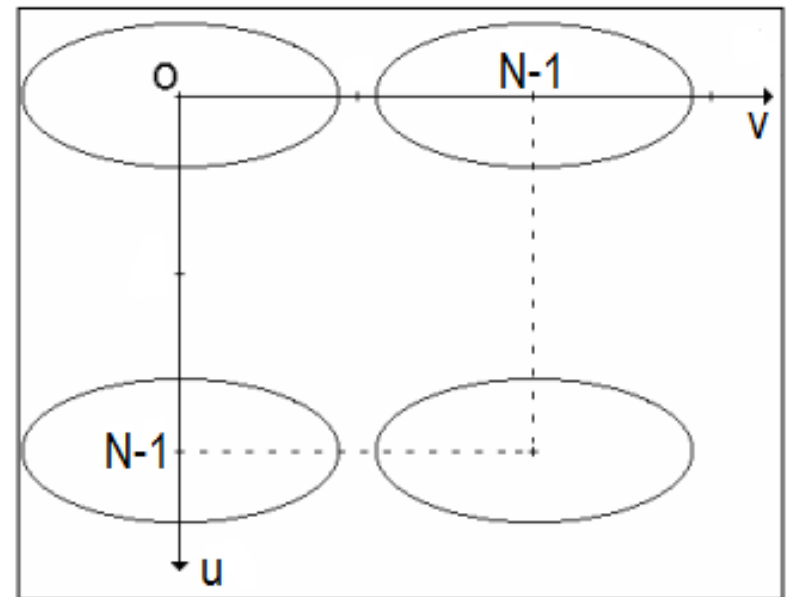


16

- **Transformada de Fourier discreta:**



Dominio espacial:
Imagen original $f(x,y)$
(valores reales)



Dominio frecuencial:
Transformada de Fourier $F(u,v)$
(valores complejos)

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia

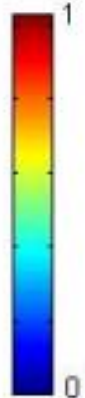
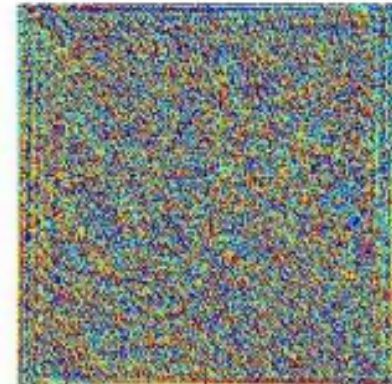
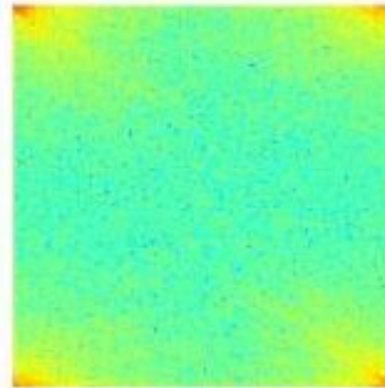


17

- **Transformada de Fourier discreta:**



Imagen original



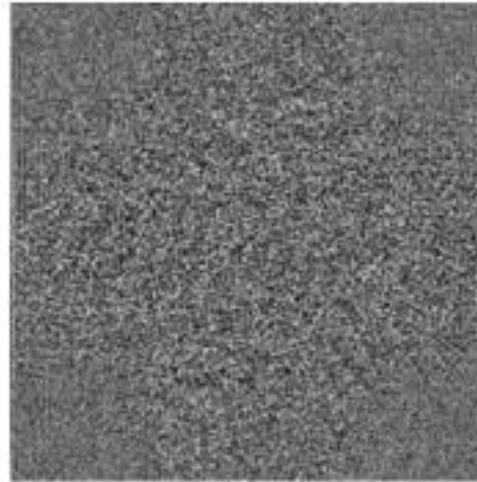
Representaciones matriciales de los módulos y las fases de los coeficientes de Fourier normalizados entre 0 y 1 y en falso color.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



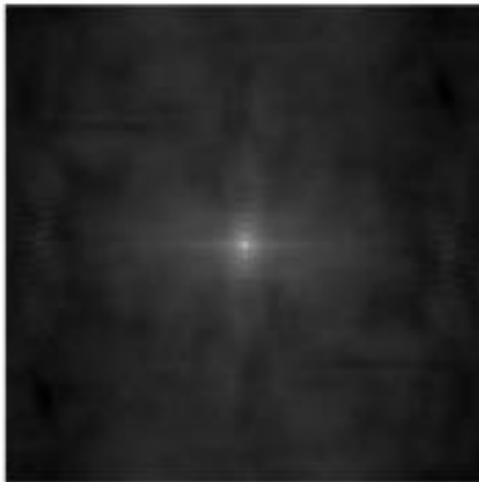
19

Imagen original



Matriz de fases

Reconstruida usando el espectro



Reconstruida usando la matriz de fases

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



20

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - Núcleo simétrico y separable
 - Linealidad
 - Simetría y periodicidad
 - Traslación y rotación
 - Valor promedio
 - Visualización del espectro de Fourier

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



21

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - **Núcleo simétrico y separable**
 - Linealidad
 - Simetría y periodicidad
 - Traslación y rotación
 - Valor promedio
 - Visualización del espectro de Fourier

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



22

- Núcleo simétrico y separable:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)/N}$$

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} e^{-2\pi i(ux+vy)/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi iux/N} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi ivy/N}$$

La ventaja que aporta esta propiedad es el hecho de poder obtener la transformada $F(u,v)$ (o la inversa $f(x,y)$) en dos pasos, mediante la aplicación de la Transformada de Fourier 1-D (o su inversa).

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



23

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - Núcleo simétrico y separable
 - **Linealidad**
 - Simetría y periodicidad
 - Traslación y rotación
 - Valor promedio
 - Visualización del espectro de Fourier

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



24

- Linealidad:

La transformada de Fourier es una aplicación lineal, es decir, dada dos imágenes $f(x,y)$ y $g(x,y)$, la transformada de Fourier de una combinación lineal de ambas imágenes es igual a la combinación lineal de las transformadas de Fourier de dichas imágenes por separado:

$$F[a f(x, y) + b g(x, y)] = a F[f(x, y)] + b F[g(x, y)]$$

donde a y b son constantes reales.

La transformada inversa de Fourier también cumple dicha propiedad.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



25

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - Núcleo simétrico y separable
 - Linealidad
 - **Simetría y periodicidad**
 - Traslación y rotación
 - Valor promedio
 - Visualización del espectro de Fourier

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



26

- Simetría:

Si $f(x,y)$ es real (lo cual se cumple en imágenes), se satisface que:

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

- Periodicidad:

Además, la transformada discreta de Fourier y su inversa son funciones periódicas de periodo N en ambas direcciones, es decir,

$$F(u,v) = F(u+k_1 N, v) = F(u, v+k_2 N) = F(u+k_1 N, v+k_2 N)$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



27

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - Núcleo simétrico y separable
 - Linealidad
 - Simetría y periodicidad
 - **Traslación y rotación**
 - Valor promedio
 - Visualización del espectro de Fourier

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



29

- Traslación:

$$f(x, y)e^{2\pi i(u_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

Al multiplicar $f(x,y)$ por la función exponencial de arriba, su transformada de Fourier se traslada, centrándose en (u_0, v_0)

Un caso particular de esta propiedad consiste en mover el origen de la transformada de Fourier de $f(x,y)$ al centro de la matriz $N \times N$ que le corresponda, es decir al punto $(N/2, N/2)$. Para ello, podemos hacer uso de que:

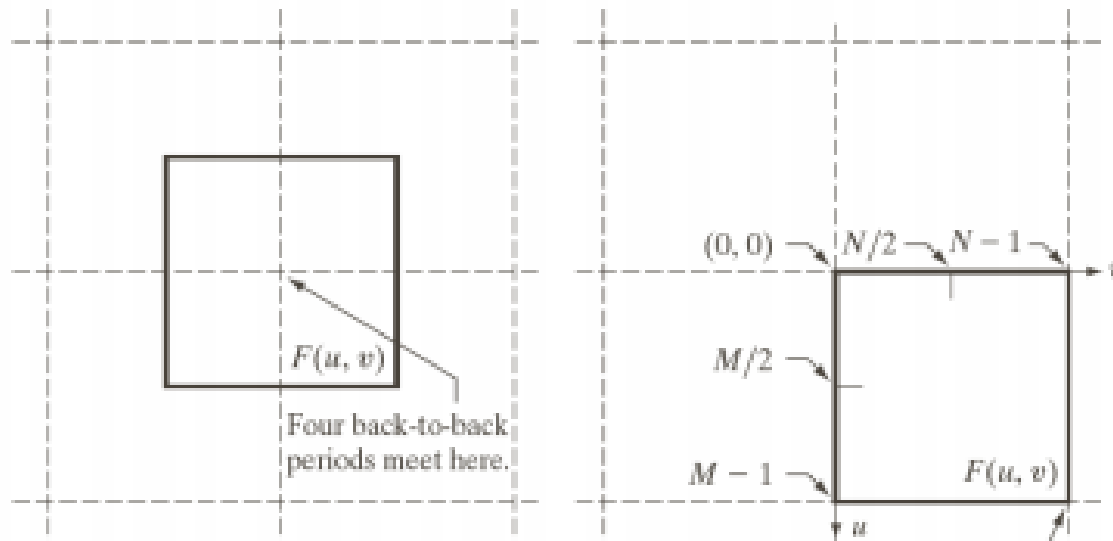
$$TF[f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - N/2, v - N/2)$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



30

- Traslación:



Four back-to-back periods meet here.

Four back-to-back periods meet here.

□ = Periods of the DFT.

■ = $M \times N$ data array, $F(u, v)$.

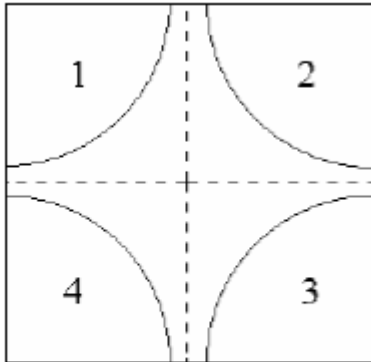
(c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods. The solid area is the $M \times N$ data array, $F(u, v)$, obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods. (d) A Shifted DFT obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ before computing $F(u, v)$. The data now contains one complete, centered period, as in (b).

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia

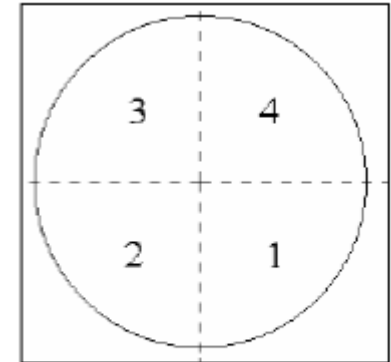
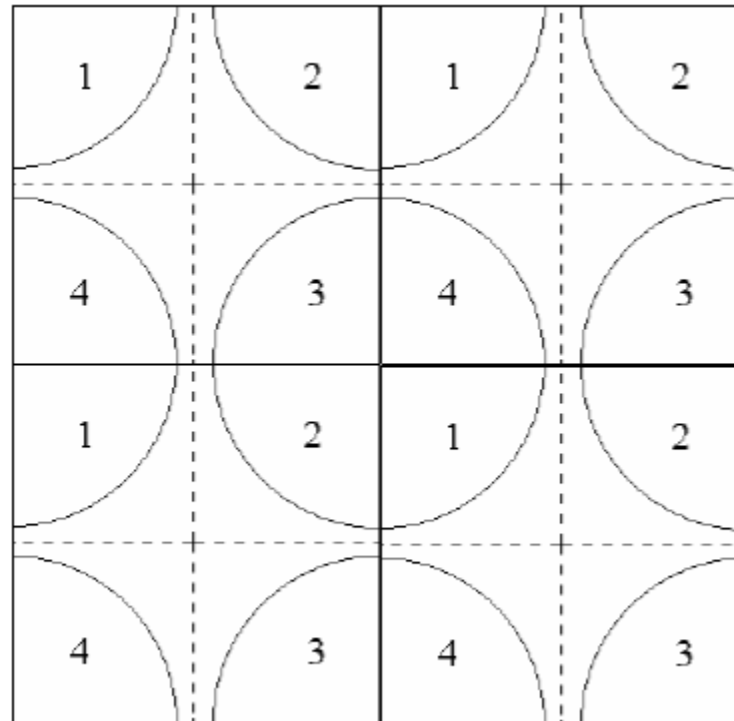


31

- Traslación:



$$TF(f(x, y))$$



$$TF((-1)^{x+y} f(x, y))$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



32

- Traslación:

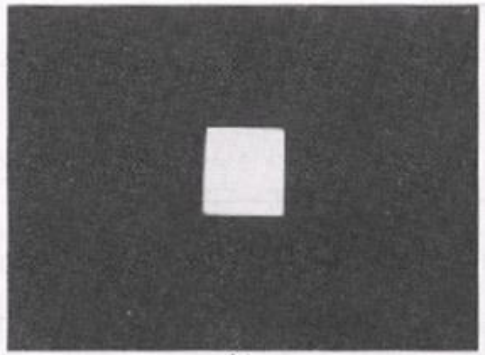
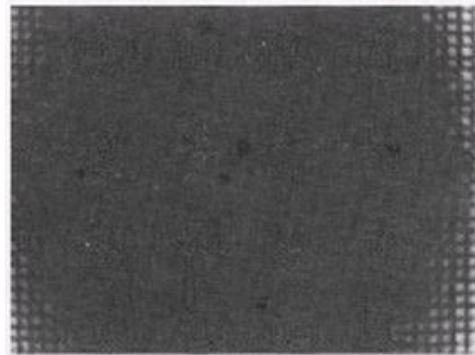
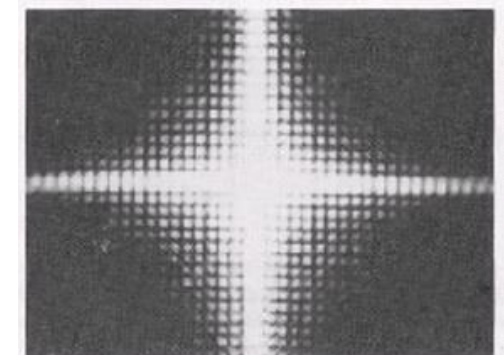


Imagen simple



Espectro de Fourier sin desplazamiento



Espectro de Fourier desplazado al centro

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



33

- Traslación:

Cabe resaltar, que un desplazamiento en la función $f(x,y)$, no provocará un cambio en la magnitud de su transformada de Fourier, ya que

$$|F(u, v)e^{-2\pi i(ux+vy)/N}| = |F(u, v)|$$

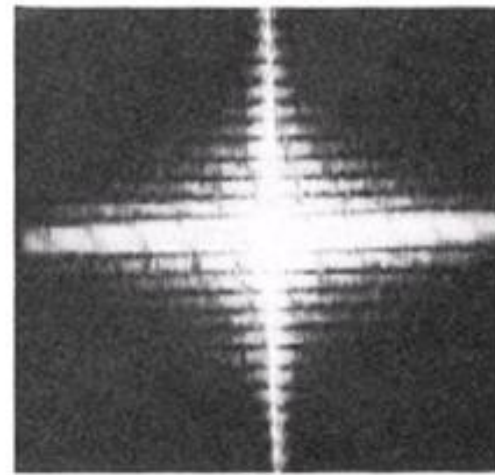
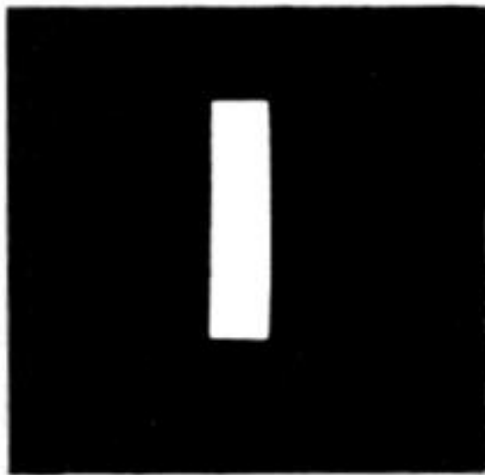
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



34

- Rotación:

Si rotamos la función $f(x,y)$ un ángulo determinado, la transformada de Fourier también será afectada por una rotación del mismo ángulo. Esta propiedad también se da a la inversa.



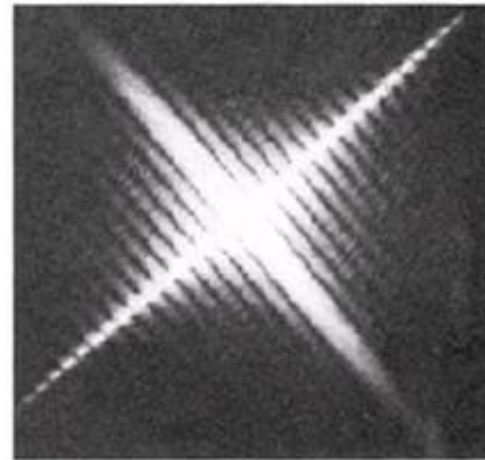
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



35

- Rotación:

Si rotamos la función $f(x,y)$ un ángulo determinado, la transformada de Fourier también será afectada por una rotación del mismo ángulo. Esta propiedad también se da a la inversa.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



36

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - Núcleo simétrico y separable
 - Linealidad
 - Simetría y periodicidad
 - Traslación y rotación
 - **Valor promedio**
 - Visualización del espectro de Fourier

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



37

- Valor promedio:

Una definición ampliamente utilizada del valor promedio de una función discreta de dos dimensiones es:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

luego:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

- **Transformada de Fourier discreta: Propiedades**
 - Núcleo simétrico y separable
 - Linealidad
 - Simetría y periodicidad
 - Traslación y rotación
 - Valor promedio
 - **Visualización del espectro de Fourier**

- Representación del logaritmo del espectro

Espectro de Fourier = $|F(u,v)|$.

El espectro de Fourier suele tener un rango mucho mayor que los usuales para mostrar una imagen. Una técnica usual para evitar esto es aplicar la transformación de intensidad log:

$$D(u,v) = c (\log(1 + |F(u,v)|))$$

donde c es la constante adecuada de reescalado de la imagen, que se aplica para obtener valores dentro de la paleta de colores disponible.

- Representación del logaritmo del espectro

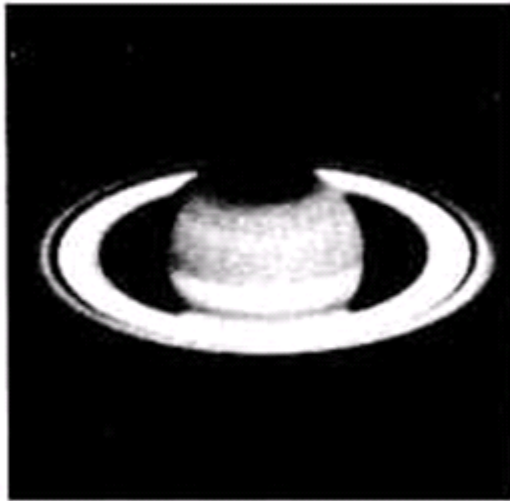
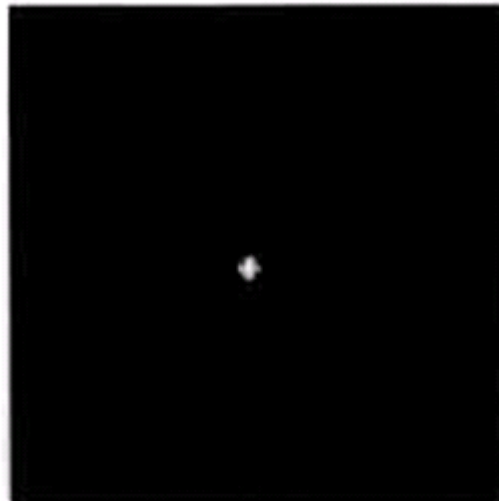
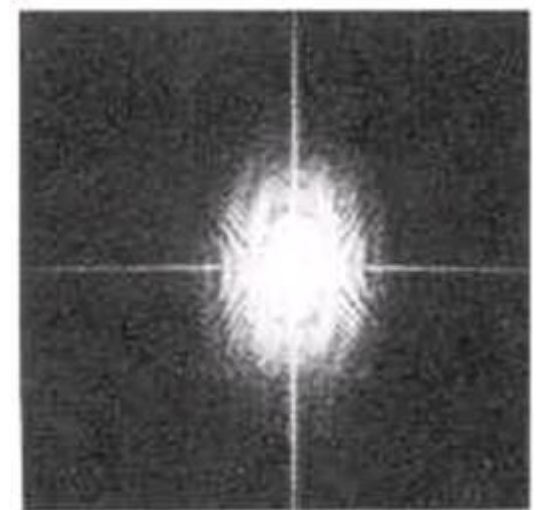


Imagen original



Espectro de Fourier

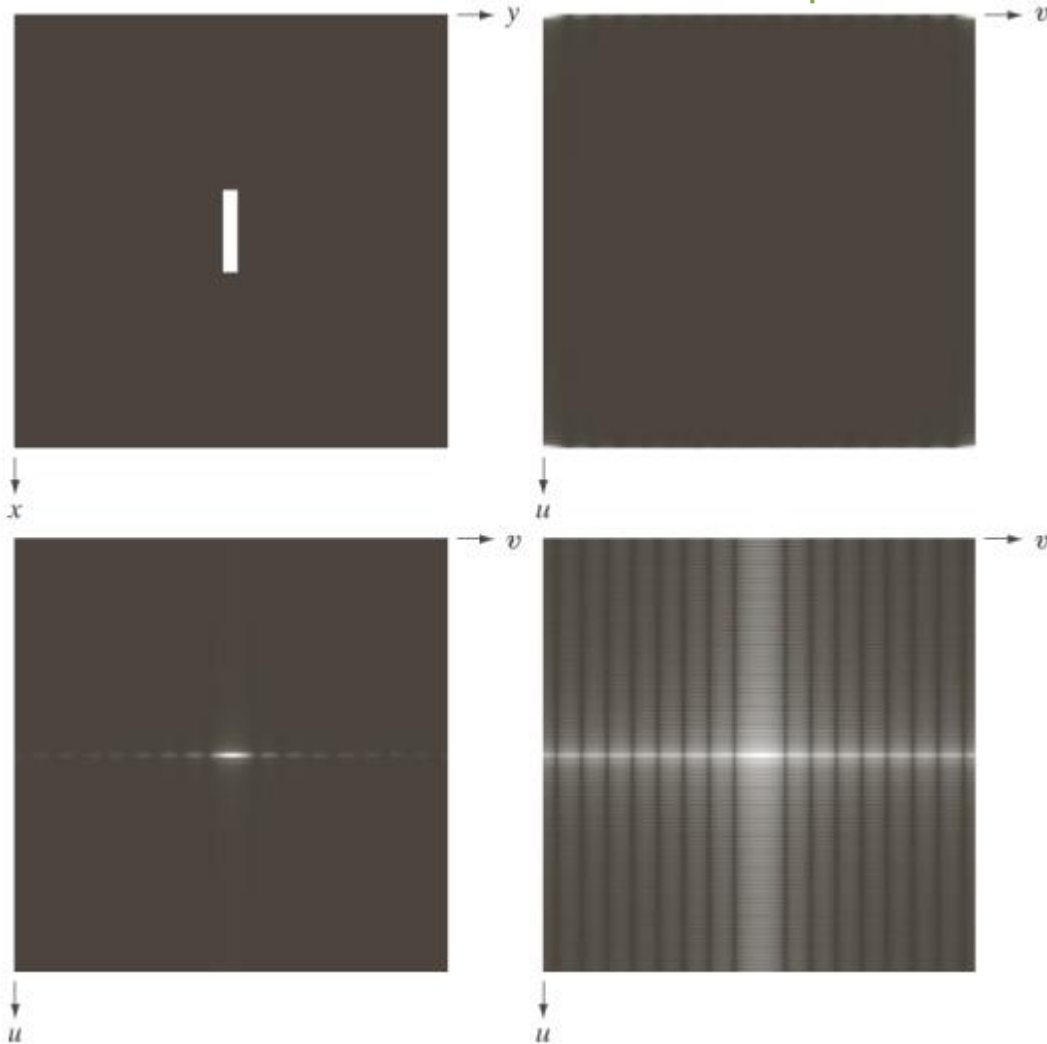


Logaritmo del espectro
escalado a 8 bits, escala de
256 niveles de gris.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



41



a	b
c	d

FIGURE 4.24

(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum.
(d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

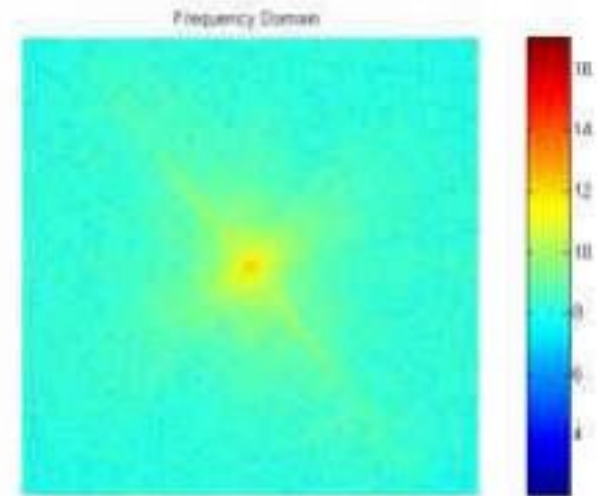
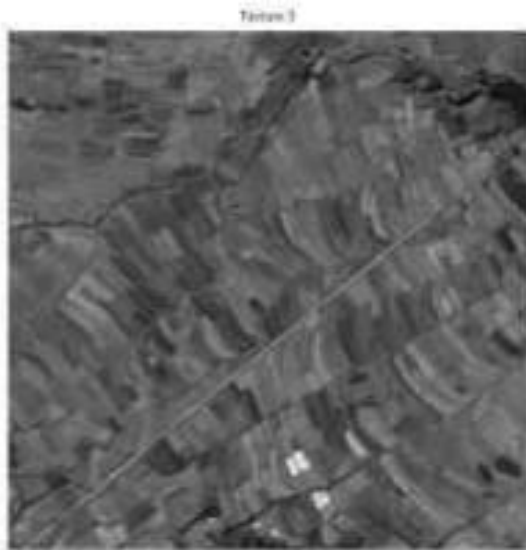
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



42

- Representación del logaritmo del espectro:

Aplicación como analizador de texturas



Texturas de campos

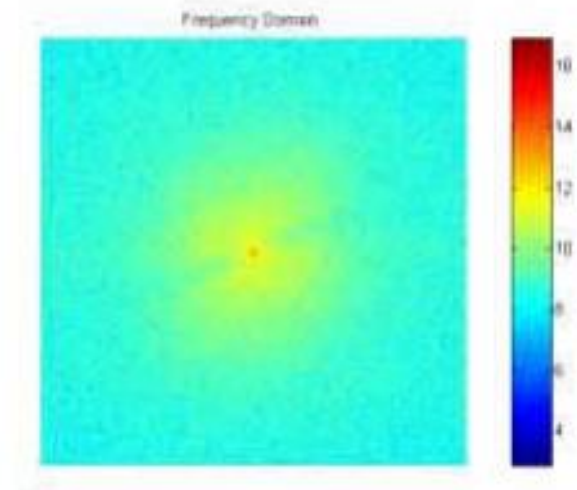
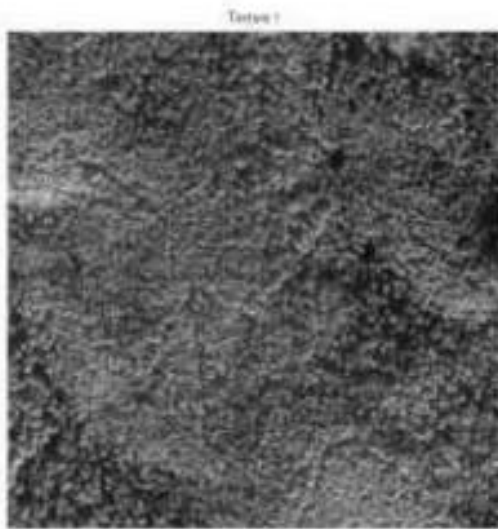
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



43

- Representación del logaritmo del espectro:

Aplicación como analizador de texturas



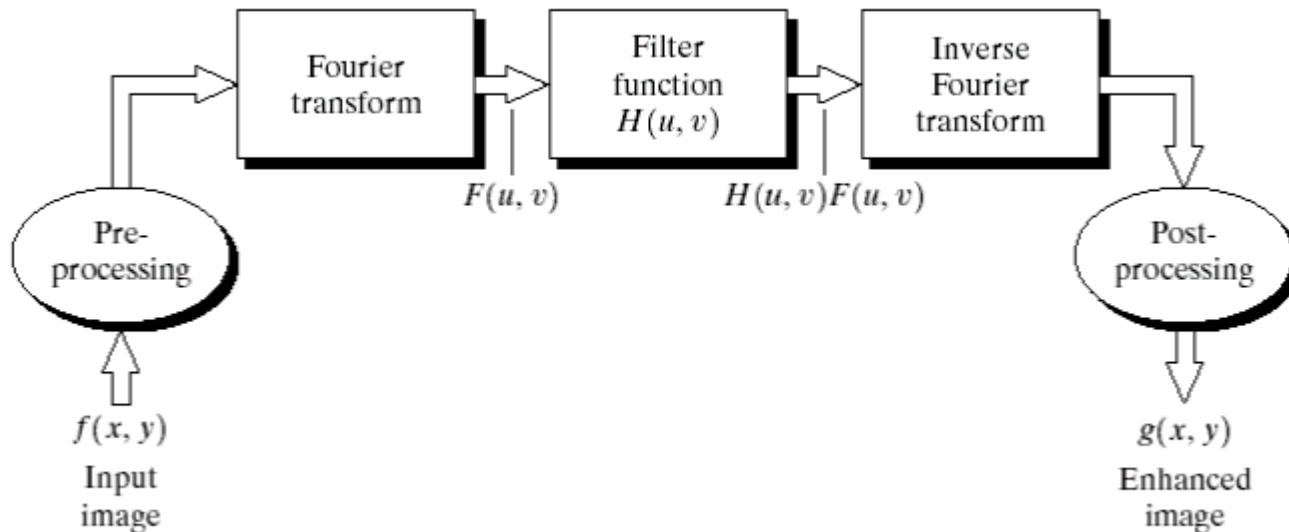
Texturas de bosques

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



46

Los filtros en el dominio de la frecuencia se usan, principalmente, para eliminar altas o bajas frecuencias de la imagen, lo que se traduce en suavizar la imagen, o bien, realzar o detectar bordes.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



47

Pasos a seguir:

1. Se multiplica la imagen por $(-1)^{x+y}$
2. Se transforma la imagen en su dominio de la frecuencia mediante la *Transformada Discreta de Fourier*, $F(u,v)$.
3. Se multiplica por un filtro de frecuencia $H(u,v)$:

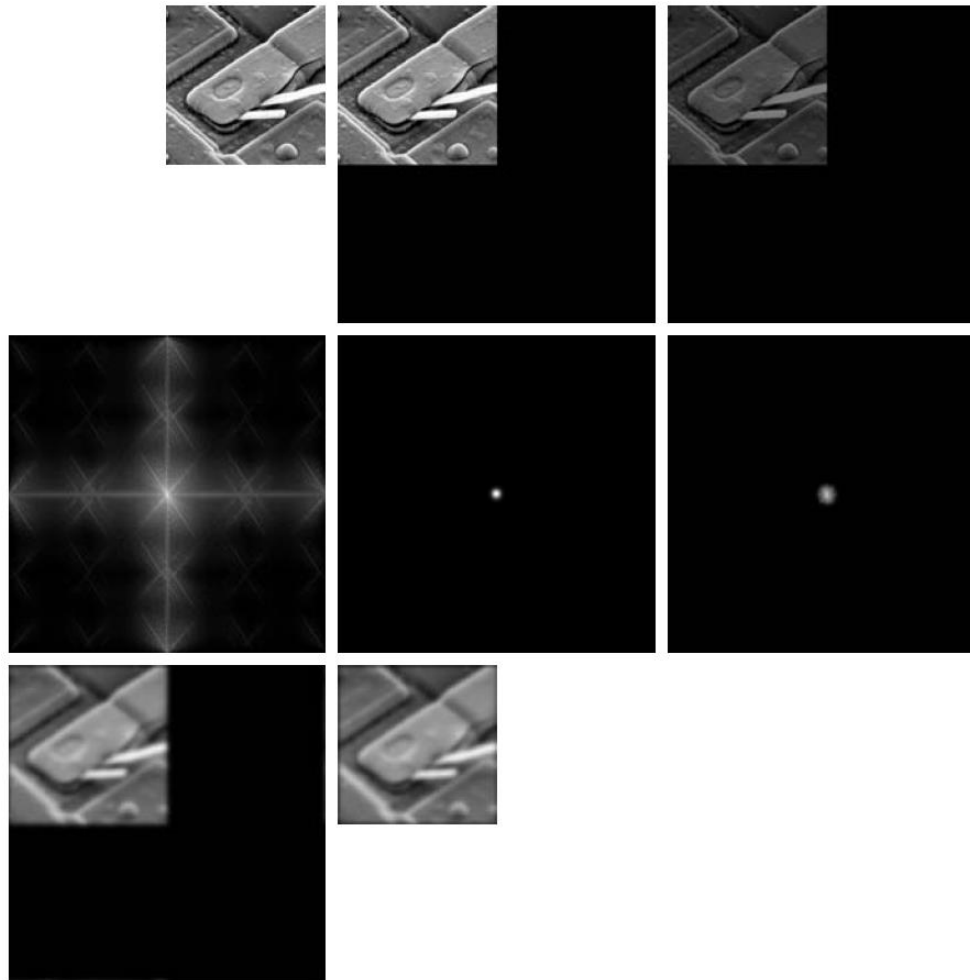
$$G(u,v) = F(u,v) * H(u,v)$$

4. Se calcula la inversa de la TDF a $G(u,v)$.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



48



a	b	c
d	e	f
g	h	

FIGURE 4.36

- (a) An $M \times N$ image, f .
- (b) Padded image, f_p of size $P \times Q$.
- (c) Result of multiplying f_p by $(-1)^{x+y}$.
- (d) Spectrum of F_p .
- (e) Centered Gaussian lowpass filter, H , of size $P \times Q$.
- (f) Spectrum of the product HF_p .
- (g) g_p , the product of $(-1)^{x+y}$ and the real part of the IDFT of HF_p .
- (h) Final result, g , obtained by cropping the first M rows and N columns of g_p .

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



49

- **Paso bajo. Filtros suavizantes:**

Atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia en el dominio de Fourier a la vez que dejan inalterables las bajas frecuencias (“deja pasar” las frecuencias bajas).

- **Paso alto. Filtros de realce:**

Atenúan o eliminan las componentes de baja frecuencia en el dominio de Fourier a la vez que dejan inalterables las altas frecuencias (“deja pasar” las frecuencias altas).

- **De banda**

Elimina unas regiones elegidas de frecuencia intermedias. Restauración de imágenes.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



50

- **Paso bajo. Filtros suavizantes:**

Atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia en el dominio de Fourier a la vez que dejan inalterables las bajas frecuencias (“deja pasar” las frecuencias bajas).

- Filtro ideal de paso bajo
- Filtro Butterworth de paso bajo
- Filtro gaussiano de paso bajo

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



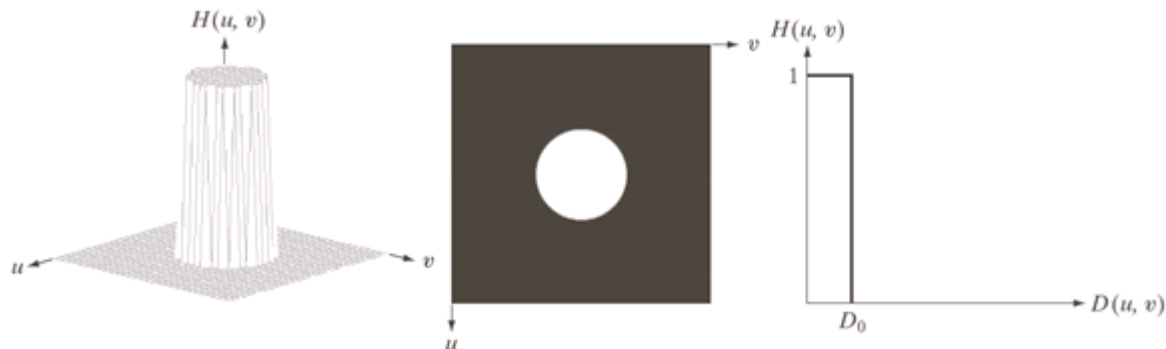
51

- **Filtro ideal de paso bajo:**

- Es el más sencillo. El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



52

- **Filtro ideal de paso bajo:**

- Es el más sencillo. El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias.

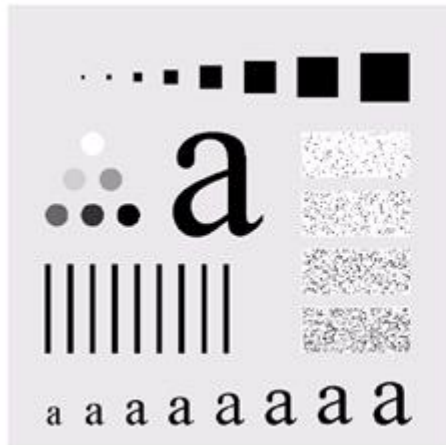
- Este filtro suprime las altas frecuencias mayores que un cierto valor D_0 , que se denomina *frecuencia de corte*, y deja las demás tal como están.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia

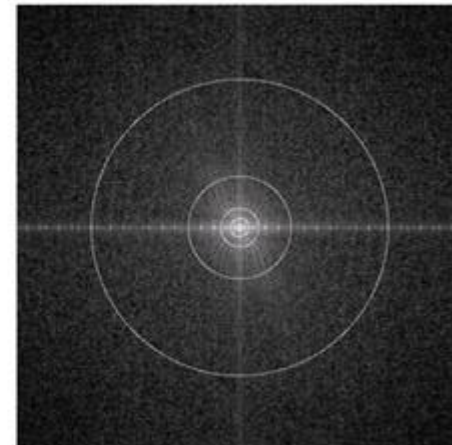


53

- **Filtro ideal de paso bajo:**



Imagen



Espectro de Fourier
 $|F(u,v)|$

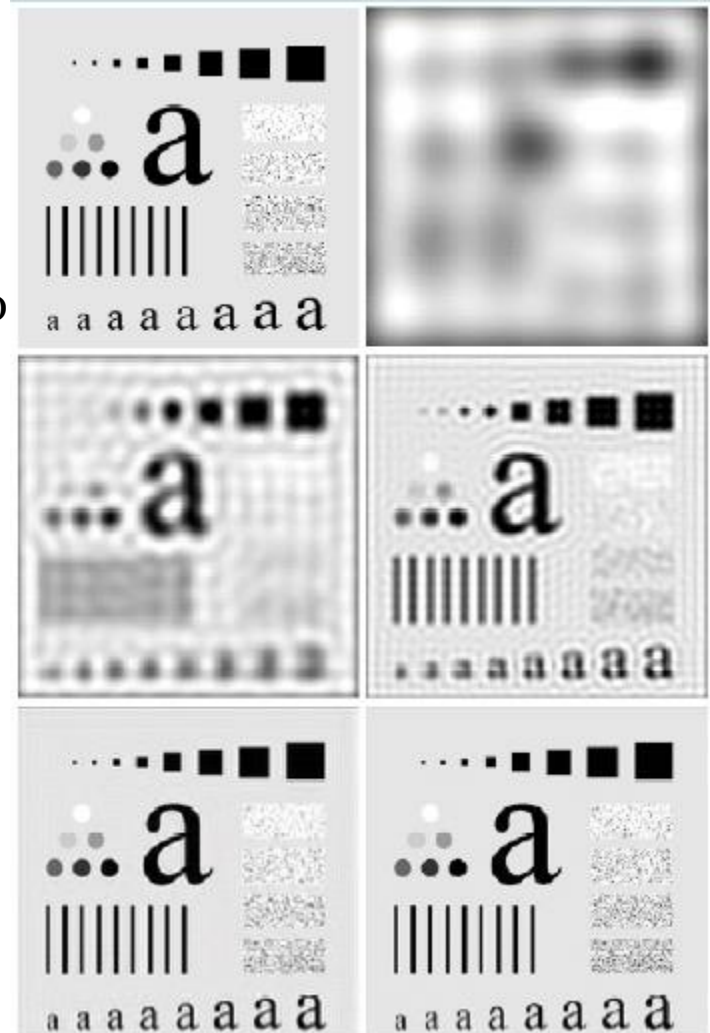
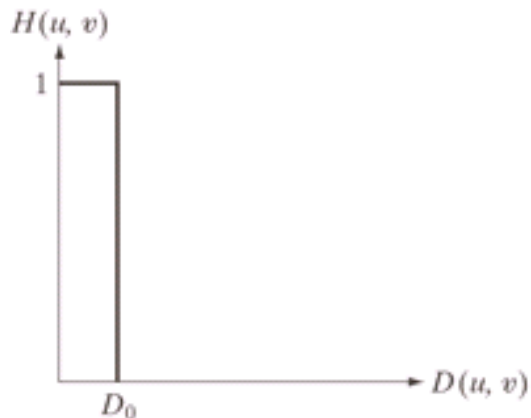
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



54

- Filtro ideal de paso bajo:**

Imagen original (superior izquierda) y resultados de aplicar un filtro ideal de paso bajo con frecuencias de corte de 5, 15, 30, 80 y 230.



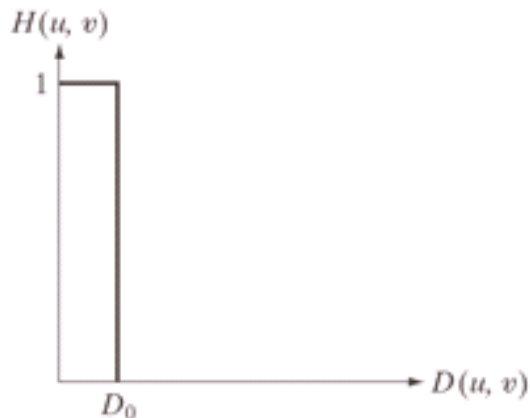
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



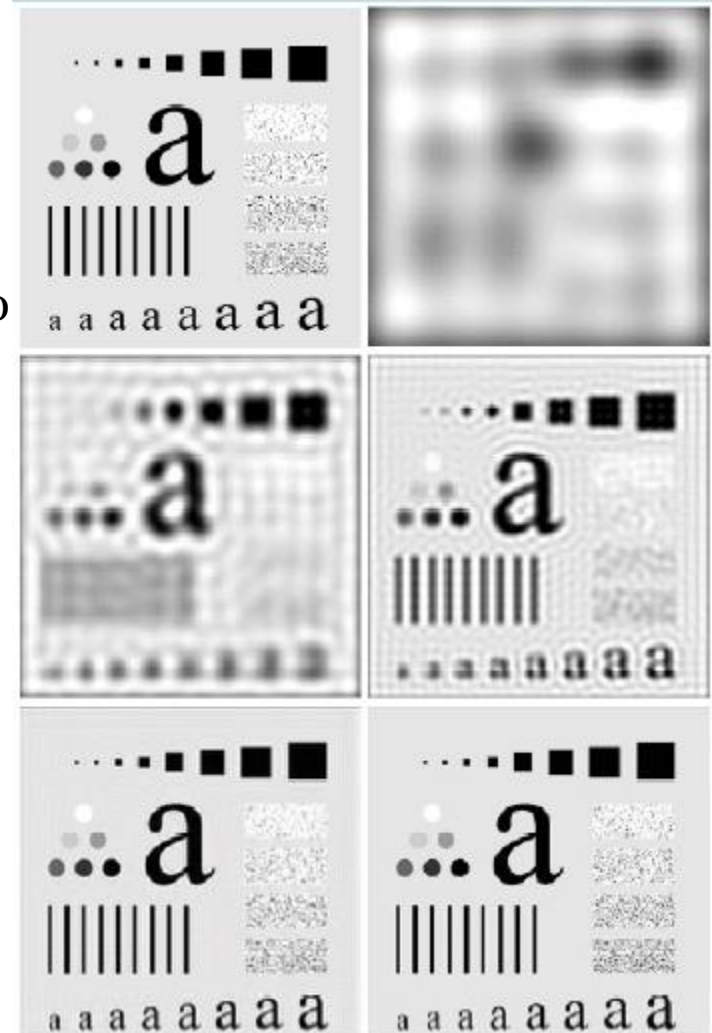
55

- Filtro ideal de paso bajo:**

Imagen original (superior izquierda) y resultados de aplicar un filtro ideal de paso bajo con frecuencias de corte de 5, 15, 30, 80 y 230.



-Nótese el efecto de ondas o anillos alrededor de los bordes.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



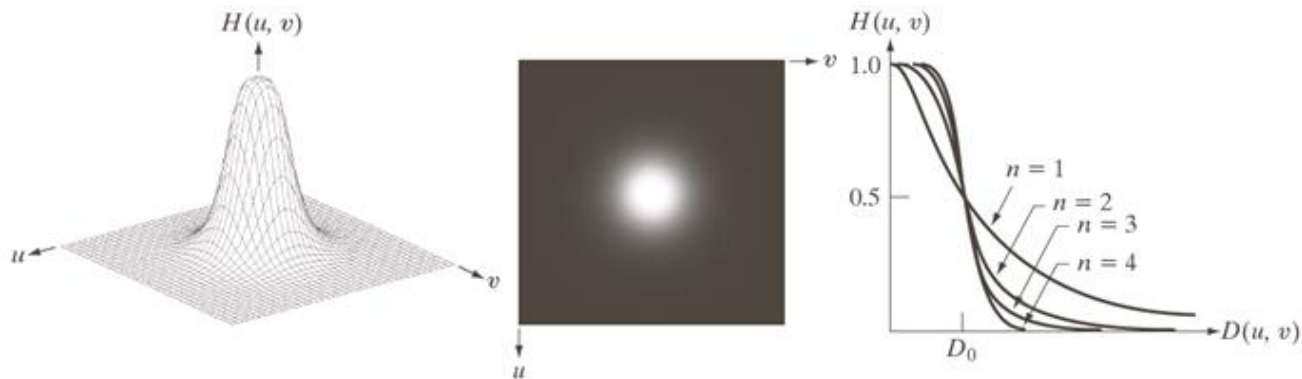
56

- **Filtro Butterworth de paso bajo de orden n:**

- El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + (D(u,v)/D_0)^{2n}}$$

donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias y D_0 la frecuencia de corte.

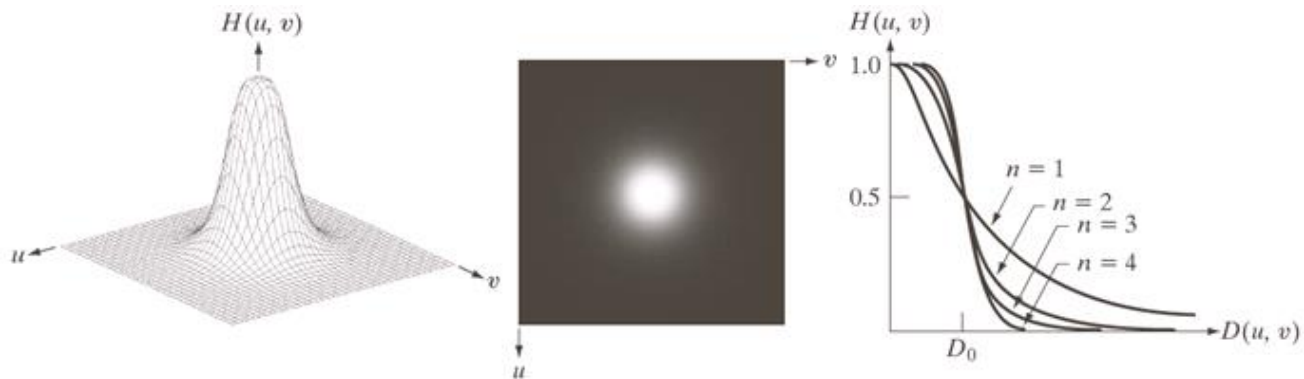
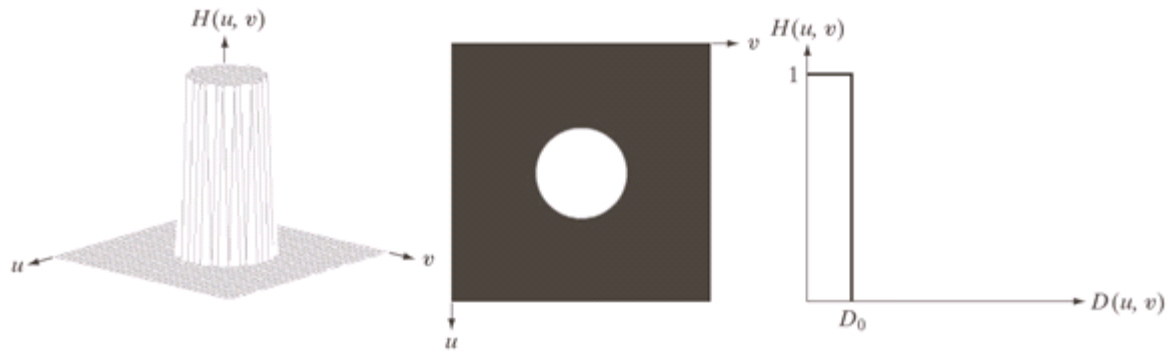


Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



57

- **Filtro Butterworth de paso bajo de orden n :**



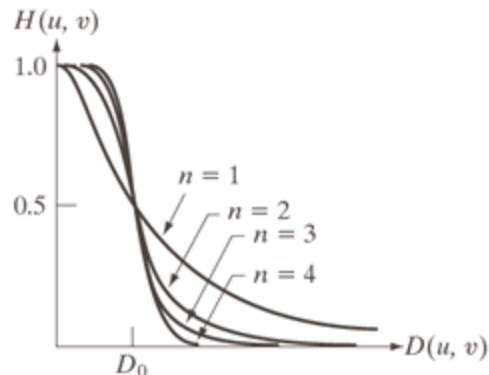
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



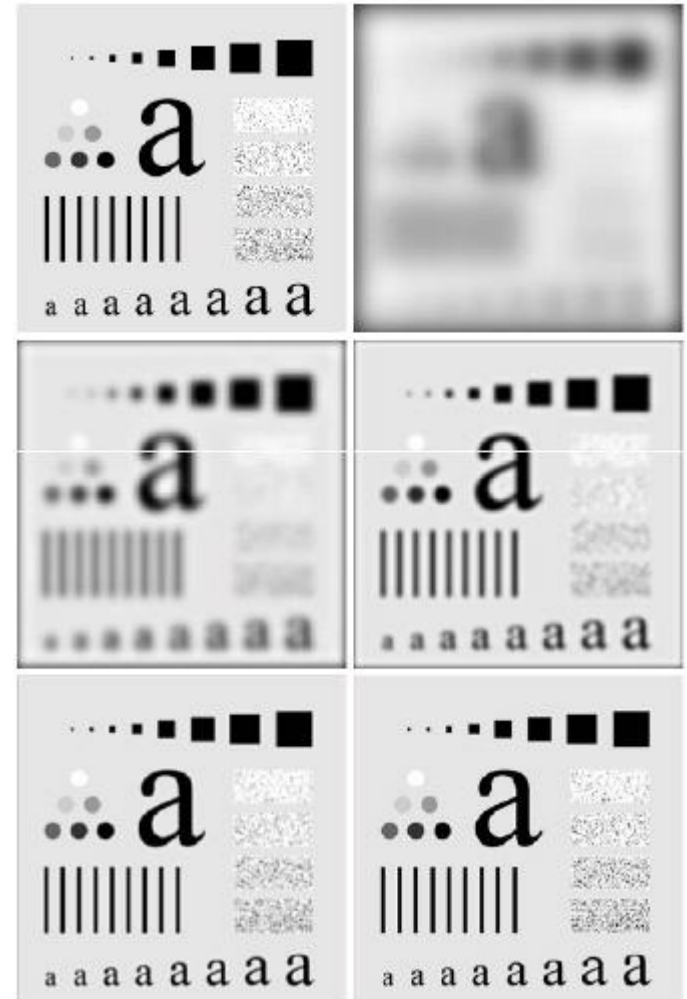
58

- Filtro Butterworth de paso bajo de orden n :**

Imagen original (superior izquierda), junto con los resultados de pasar un filtro Butterworth de paso bajo de orden 2 con frecuencias de corte de 5, 15, 30, 80 y 230.



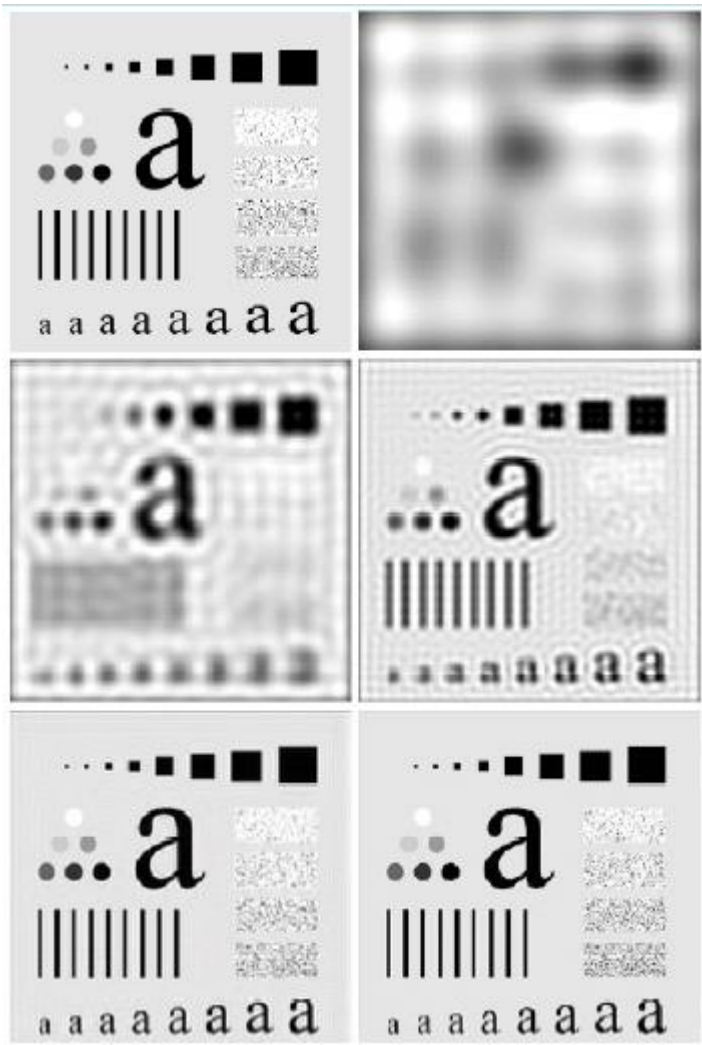
- Nótese que ahora no aparecen los efectos de hondas o anillos en torno a los bordes.



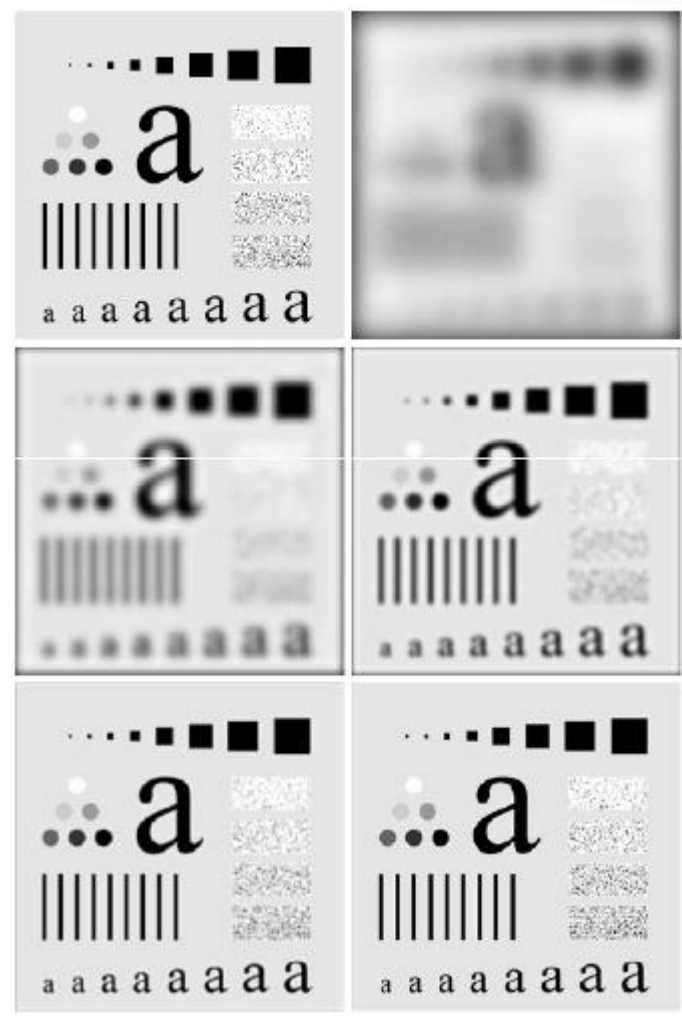
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



Filtro Ideal



Filtro de Butterwoth de orden 2



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



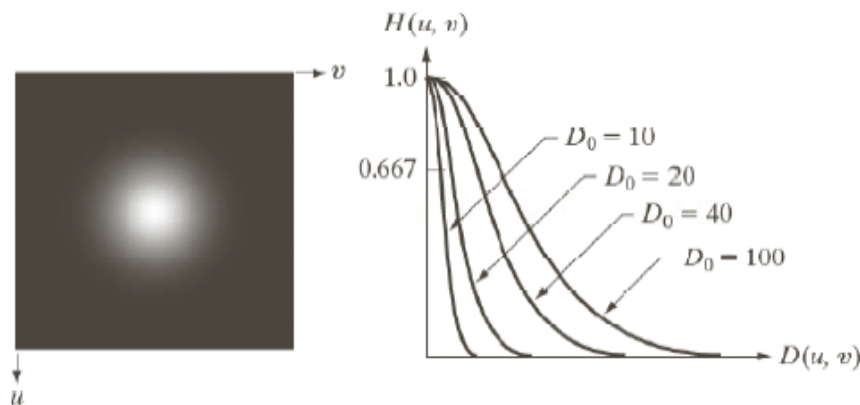
60

- **Filtro gaussiano de paso bajo:**

- El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/(2D_0^2)}$$

donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias y D_0 la frecuencia de corte.



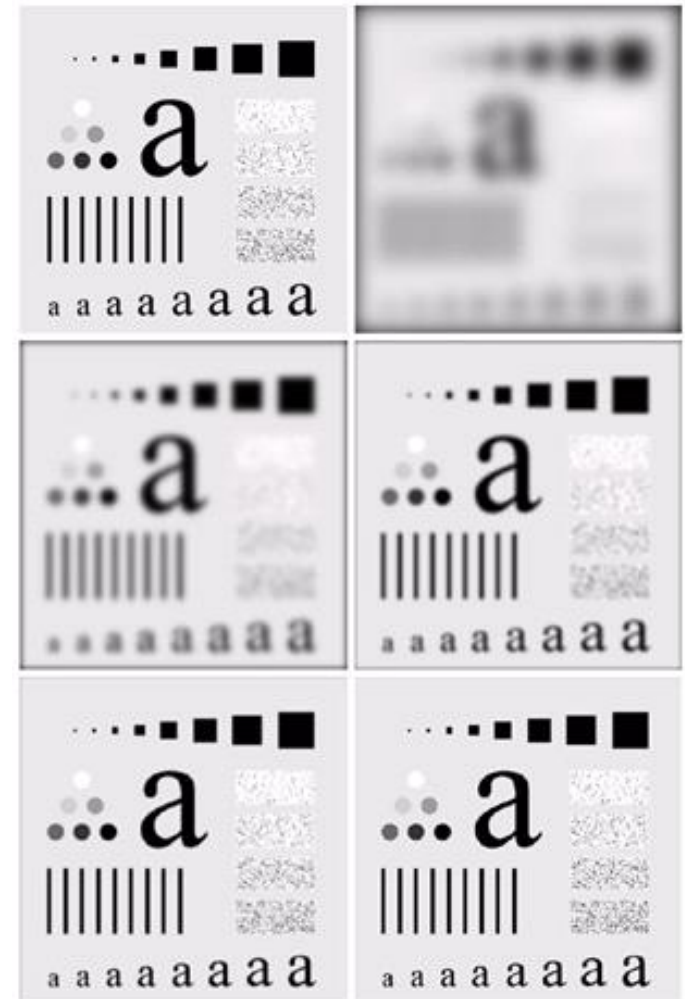
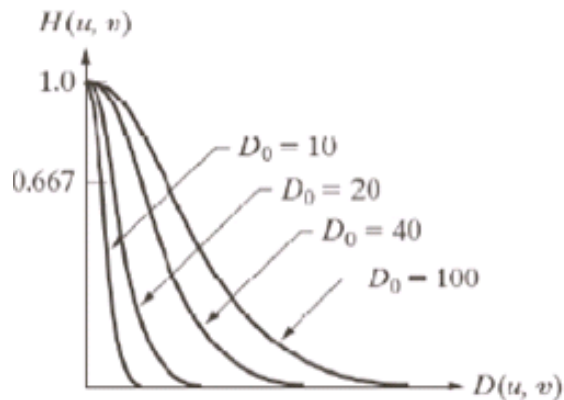
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



61

- **Filtro gaussiano de paso bajo:**

Imagen original (superior izquierda) y resultados de aplicar un filtro ideal de paso bajo con frecuencias de corte de 5, 15, 30, 80 y 230.



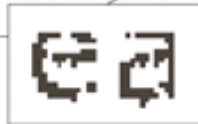
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



62

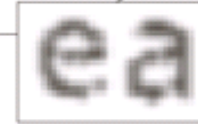
- **Filtro gaussiano de paso bajo:**

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Texto de baja resolución

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Filtro gaussiano de paso bajo

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



63

- **Filtro gaussiano de paso bajo:**



Imagen original de
784 x 732 píxeles



Filtro gaussiano con
 $D_0 = 100$



Filtro gaussiano con
 $D_0 = 80$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



64

- **Filtro gaussiano de paso bajo:**

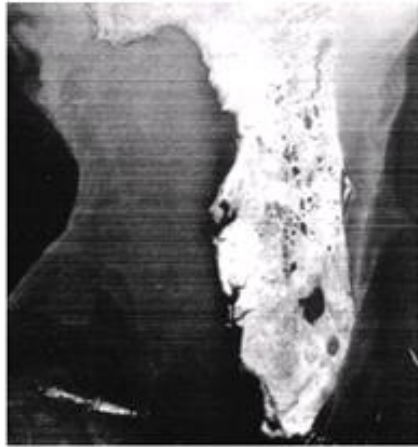
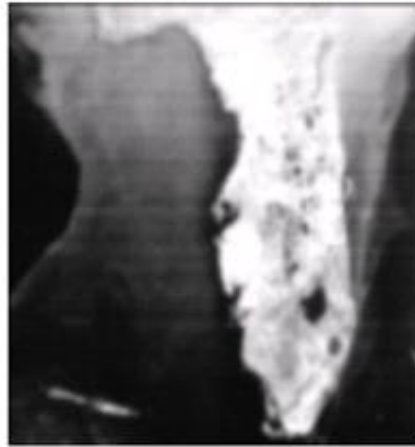
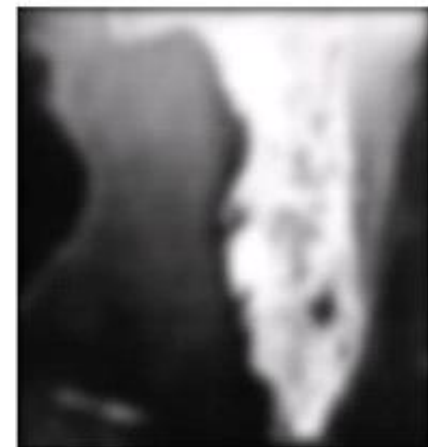


Imagen original con destacadas líneas horizontales.



Filtro gaussiano con $D_0 = 50$

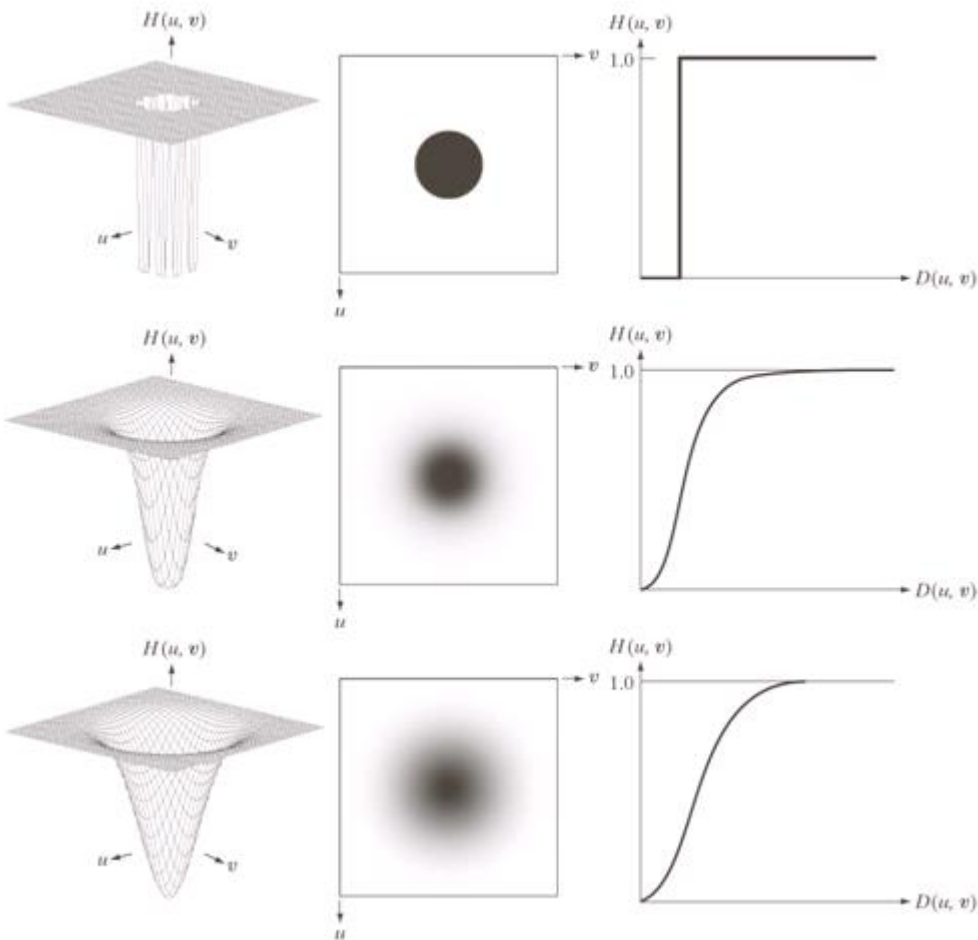


Filtro gaussiano con $D_0 = 20$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



65



Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

Butterworth

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

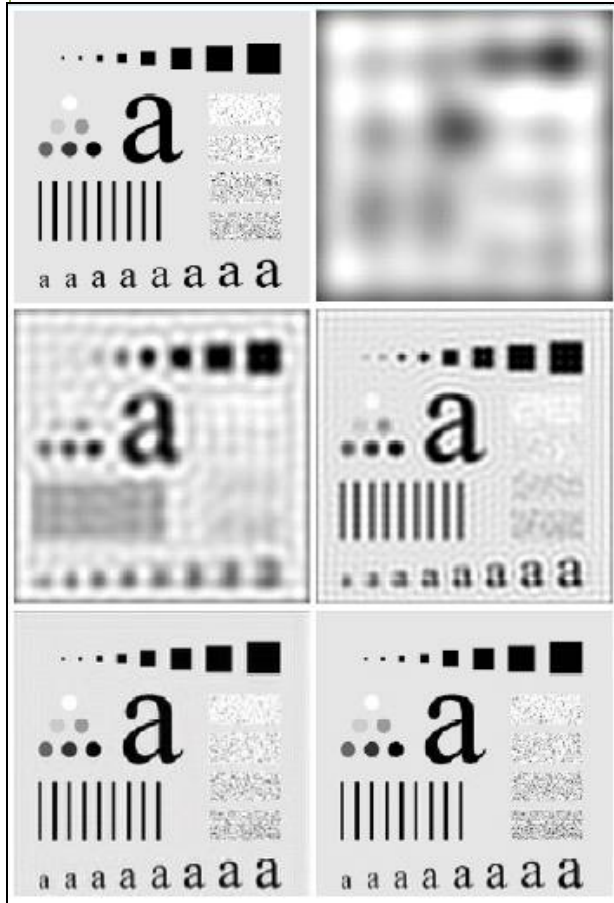
Gaussian

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

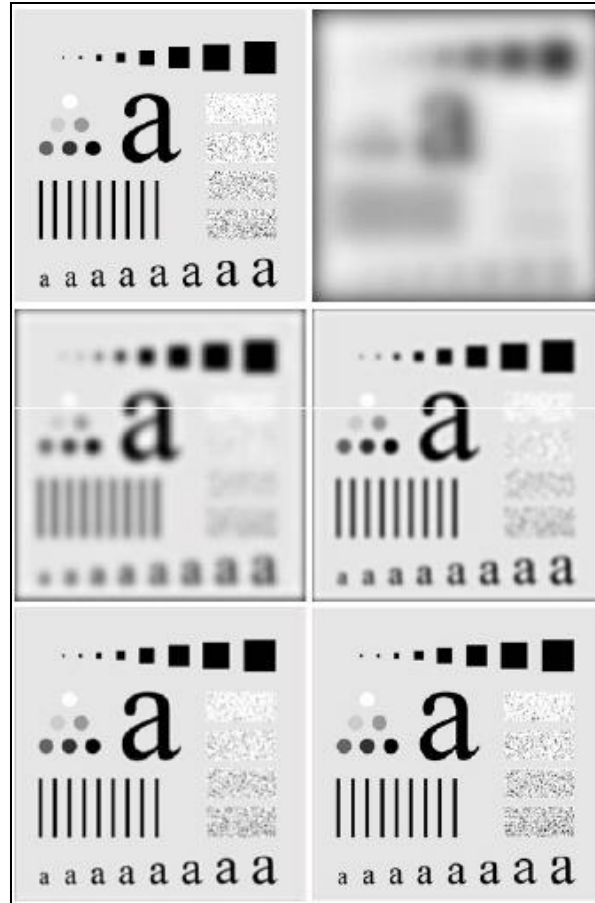
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



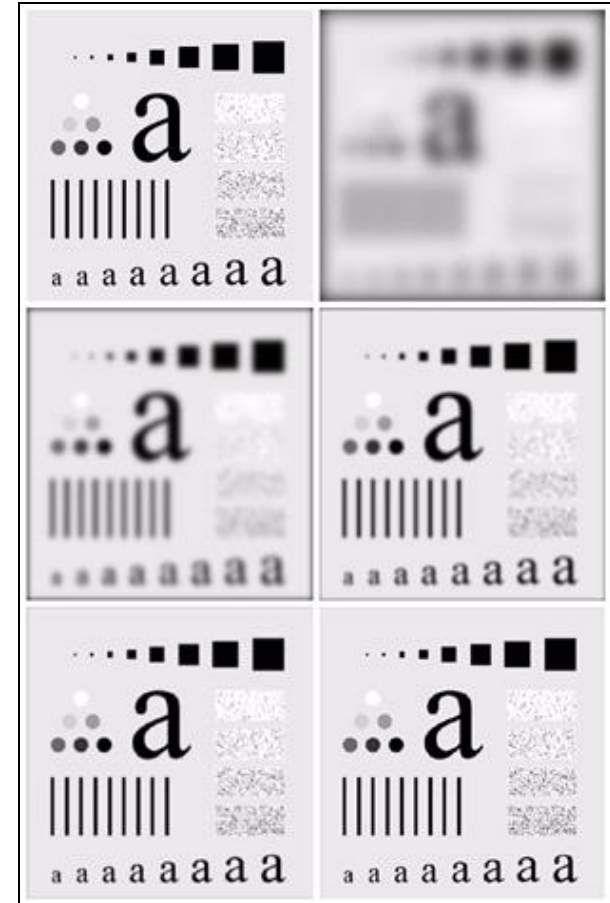
66



Ideal



Butterworth de orden 2



Gaussiano

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



67

- **Paso alto. Filtros de realce:**

Atenúan o eliminan las componentes de baja frecuencia en el dominio de Fourier a la vez que dejan inalterables las altas frecuencias (“deja pasar” las frecuencias altas).

- Filtro ideal de paso alto
- Filtro Butterworth de paso alto.
- Filtro gaussiano de paso alto.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



68

- **Filtro ideal de paso alto:**

- Es el más sencillo. El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



69

- **Filtro ideal de paso alto:**

- Es el más sencillo. El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias.

- El filtro suprime las frecuencias menores o iguales que un cierto valor D_0 , que se denomina *frecuencia de corte*, y deja las demás tal como están.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



70

- **Filtro ideal de paso alto:**



- Resultados usando frecuencia de corte 30, 60 y 160.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



71

- **Filtro Butterworth de paso alto de orden n:**

- El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

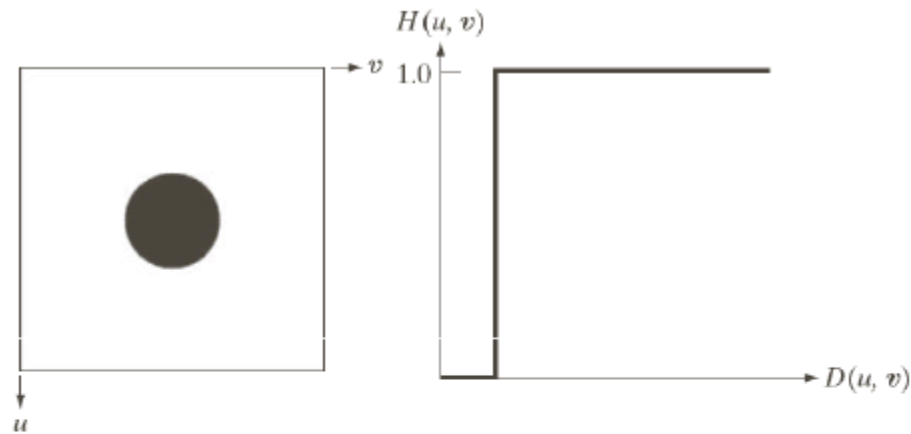
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + (D_0 / D(u,v))^{2n}}$$

donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias y D_0 la frecuencia de corte.

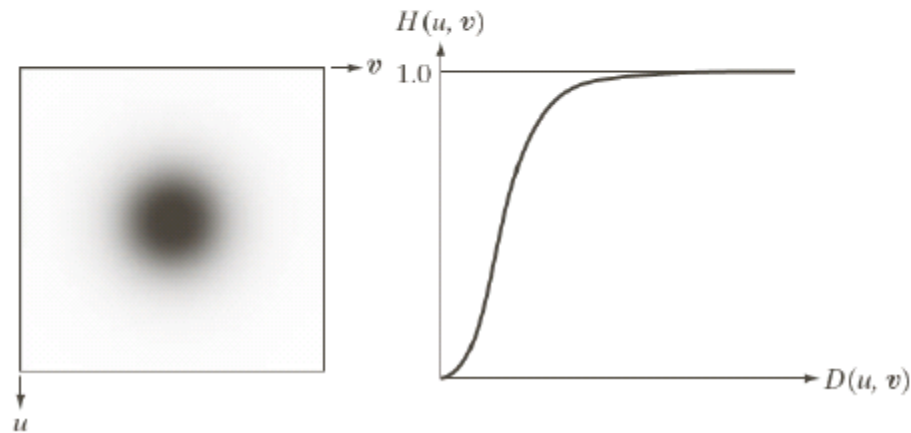
Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



72



Filtro ideal de paso alto



Filtro Butterwoth

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



73

- **Filtro Butterworth de paso alto de orden n :**



- Resultados de orden 2 usando frecuencia de corte 30, 60 y 160.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



74

- **Filtro gaussiano de paso alto:**

- El filtro de frecuencia $H(u,v)$ viene dado por:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/(2D_0^2)}$$

donde $D(u,v)$ es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias y D_0 la frecuencia de corte.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



75

- **Filtro gaussiano de paso alto:**

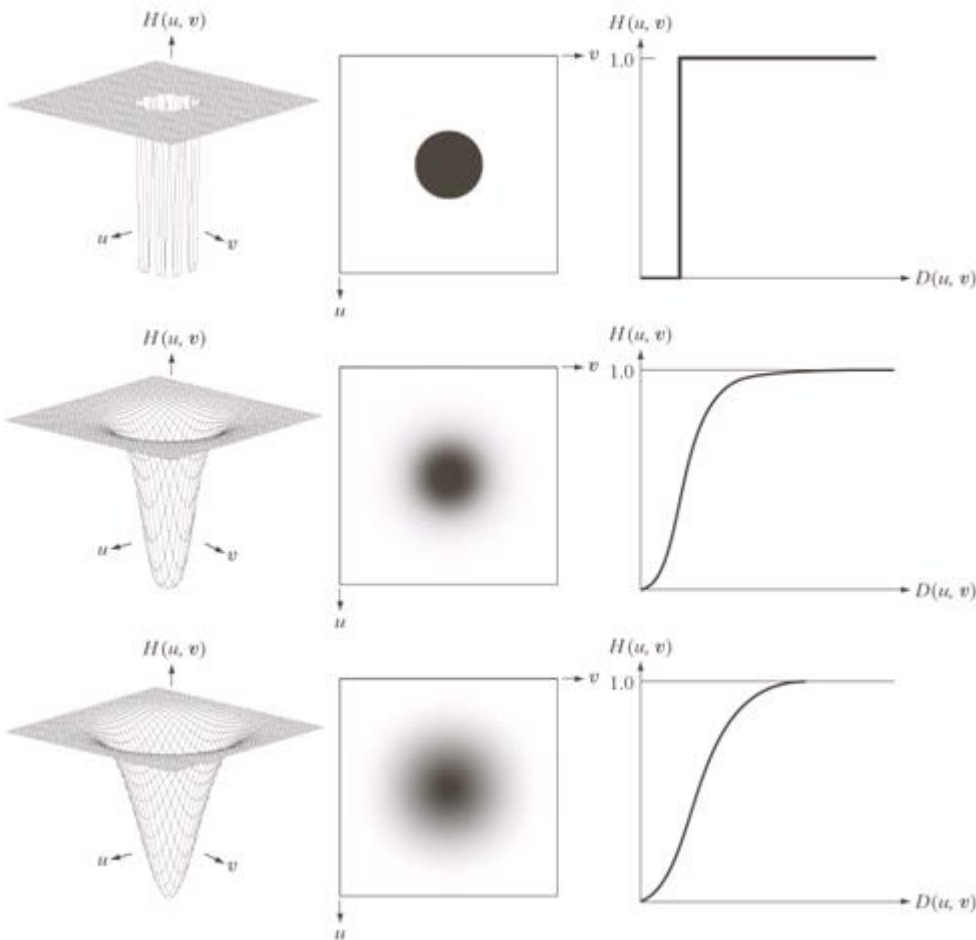


- Resultados usando frecuencia de corte 30, 60 y 160.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



76



Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

Butterworth

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

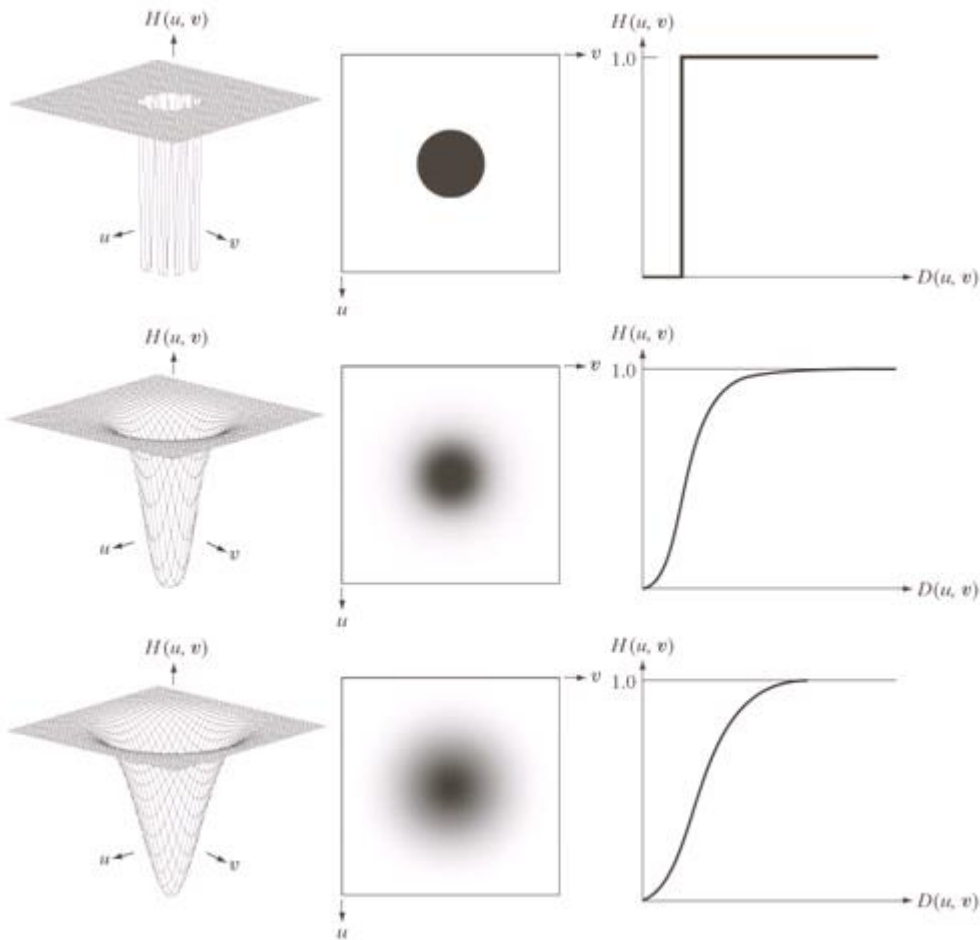
Gaussian

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



77



Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

Butterworth

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

Gaussian

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



78



Huella dactilar



Resultado de aplicar un filtro de paso alto

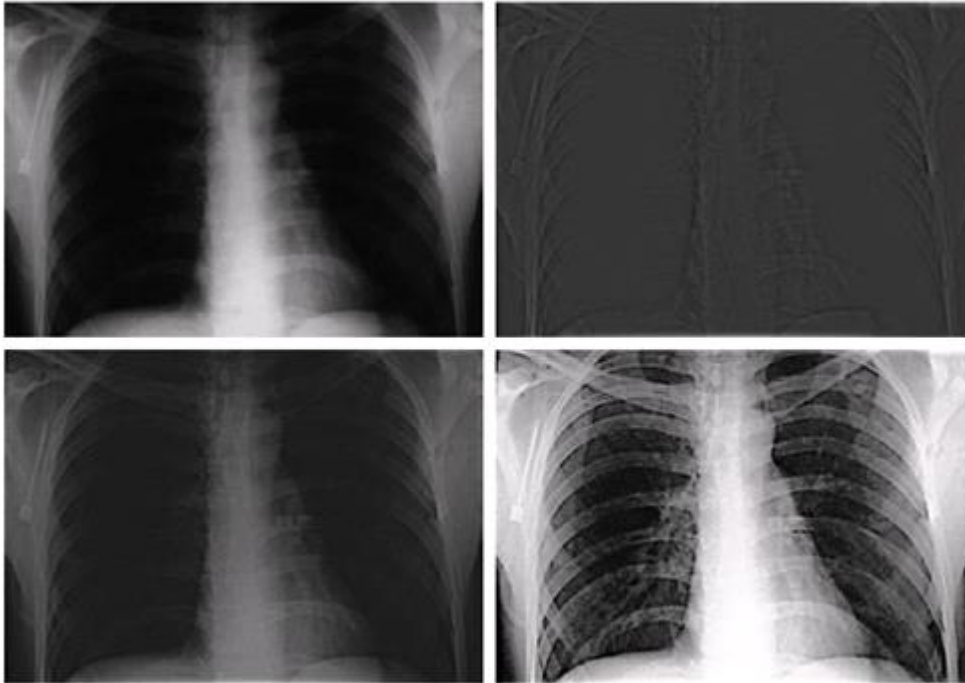


Resultado de umbralizar la imagen

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



79



- a) Imagen original rayos X.
- b) Resultado de aplicar un filtro gaussiano de paso alto.
- c) Resultado de mejorar la imagen anterior aplicando de nuevo un filtro gaussiano de paso alto.
- d) Ecuación del histograma de c).

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



80

- **Filtros de banda:**

Un filtro de banda atenúa las altas y bajas frecuencias, pero mantiene intactas las frecuencias que se encuentren en una banda determinada.

En el caso del filtro ideal, sólo deja pasar las frecuencias que están entre dos frecuencias de corte.

Se puede obtener un filtro de banda multiplicando uno de paso bajo por uno de paso alto, en el que la frecuencia de corte del de paso bajo sea superior a la del de paso alto.

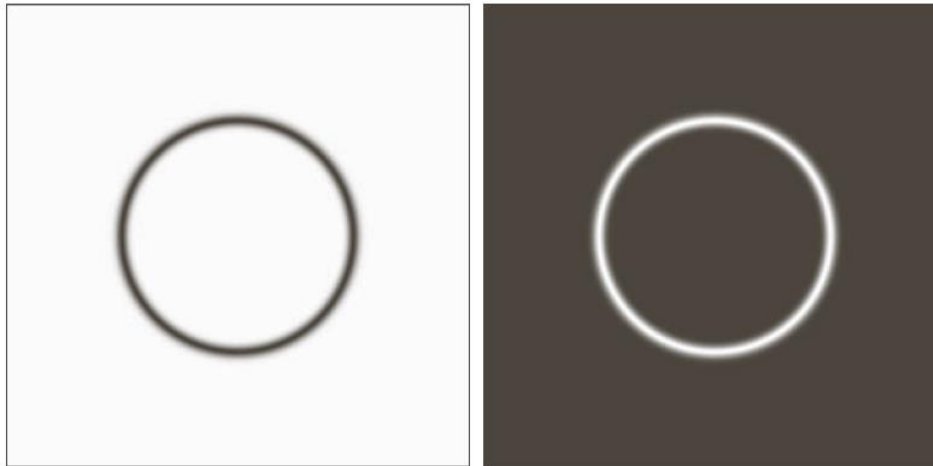
El opuesto al filtro de paso de banda sería de “rechazo de banda” (bandreject o band-stop), en el que se atenúan las frecuencias de la banda, pero se mantienen la frecuencias fuera de ella.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



81

- **Filtros de banda:**



a b

FIGURE 4.63

(a) Bandreject Gaussian filter.
(b) Corresponding bandpass filter.
The thin black border in (a) was added for clarity; it is not part of the data.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia

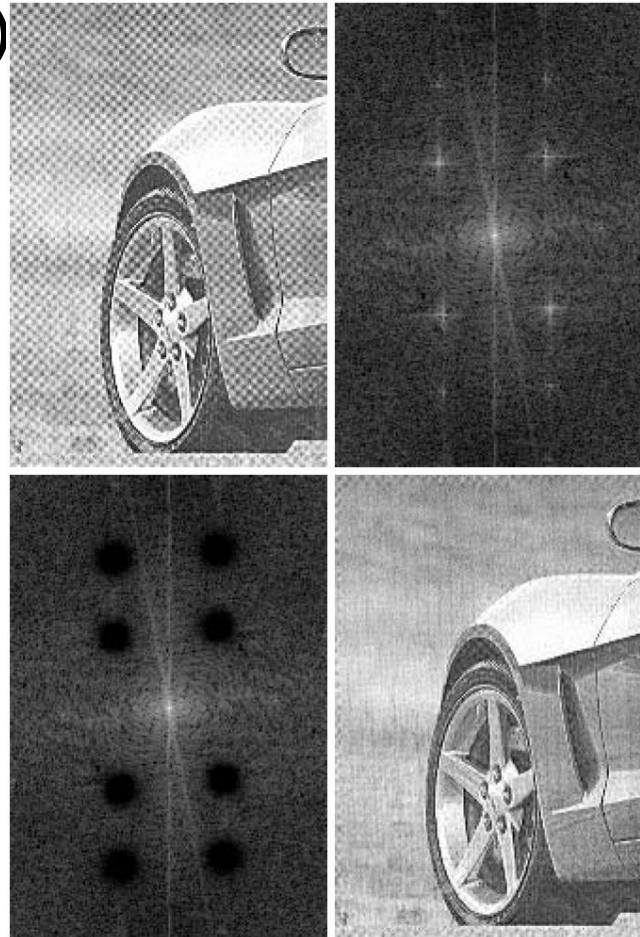


82

Notch filter (filtro de “muesca”)

Se rechazan (o dejan pasar) las frecuencias en un determinado entorno del origen de frecuencias.

Aplicación, por ejemplo, para eliminar ruido periódico en la imagen.



a b
c d

FIGURE 4.64

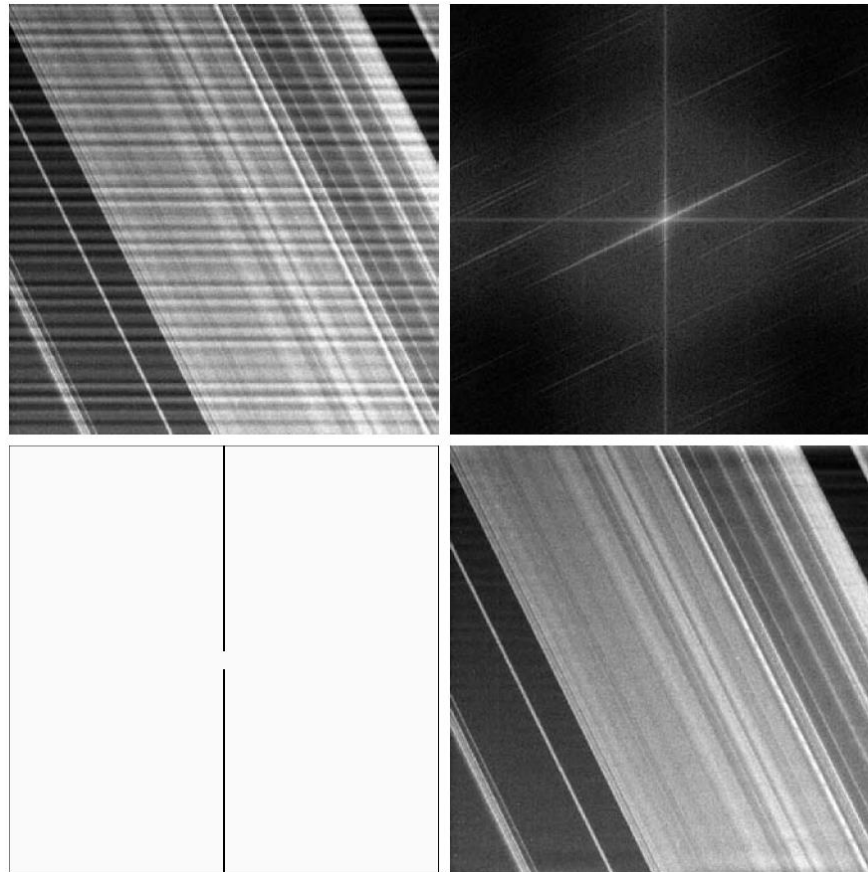
(a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern. (b) Spectrum. (c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform. (d) Filtered image.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



83

Notch filter (filtro de “muesca”)



a b
c d

FIGURE 4.65

(a) 674×674 image of the Saturn rings showing nearly periodic interference. (b) Spectrum: The bursts of energy in the vertical axis near the origin correspond to the interference pattern. (c) A vertical notch reject filter. (d) Result of filtering. The thin black border in (c) was added for clarity; it is not part of the data. (Original image courtesy of Dr. Robert A. West, NASA/JPL.)

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



84

La transformada Discreta del Coseno y el estándar JPEG

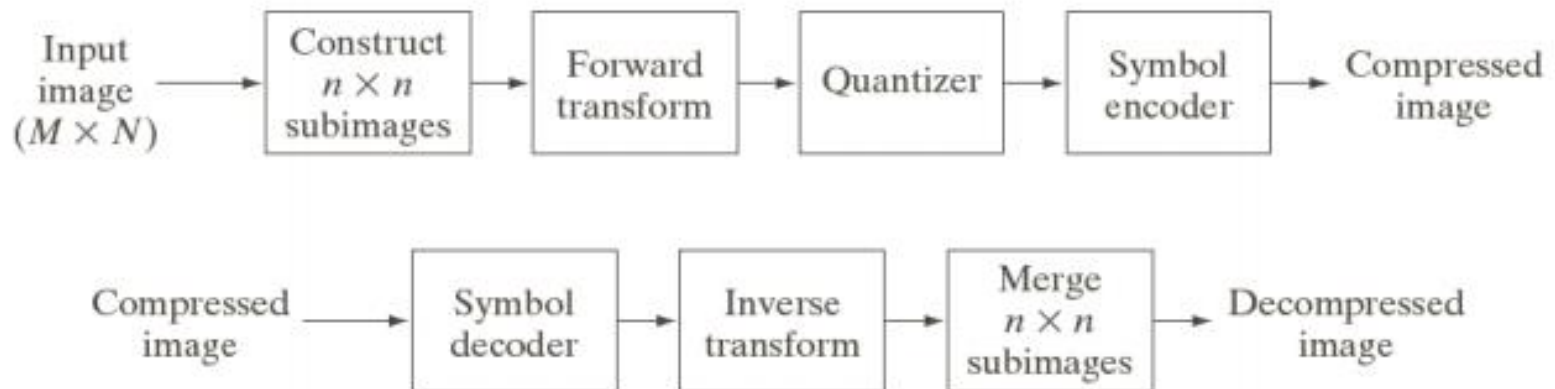
- La iluminación de una región, tal y como se percibe por el ojo, depende de otros factores aparte de la luz reflejada. Esto ocurre porque el ojo no responde con igual sensibilidad a toda la información visual.
- Cierta información tiene menor importancia que otra en el proceso de visión normal.
- Se dice que esta información es **psicovisualmente redundante** y se puede eliminar sin que altere la calidad de la percepción de la imagen.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



85

- El método principal para eliminar redundancia psicovisual es el basado en transformadas por bloques de la imagen, lo que da lugar a una compresión con pérdida de información.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



86

Al contrario de lo que sucedía con los métodos anteriores, son necesarios indicadores que nos permitan medir el error que se comete después de comprimir y descomprimir con respecto a la imagen original. Por ejemplo:

- **Error cuadrático medio** en una imagen $M \times N$:

$$\sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\bar{f}(x, y) - f(x, y))^2}$$

donde $f(x, y)$ es la imagen original y $\bar{f}(x, y)$ la imagen obtenida después de comprimir y descomprimir.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



87

- La transformada por excelencia para la compresión de imágenes es la **Transformada Discreta del Coseno ó TDC**.
- La TDC se usa en el **estándar de compresión JPEG** (del inglés Joint Photographic Experts Group, nombre del comité de expertos que lo creó).
- Un **estándar de compresión** define una serie de procedimientos para comprimir y descomprimir imágenes que se establecen como estándares internacionales para la compresión.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



88

- **Estándar de compresión JPEG:**

- Método más adecuado para fotografías e imágenes de tonos continuos similares que contengan muchos colores.
- Mantiene una calidad en la imagen muy elevada.
- Define, entre otros, el sistema de codificación llamado “sequential baseline system”, que consta de los siguientes pasos:

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



89

- **Estándar de compresión JPEG:**

1. Se pasa la imagen del formato RGB a uno en el que se separen las informaciones de luminosidad y color. El ojo humano es mucho más sensible a la luminosidad que al color, por lo que usualmente, como paso previo, se reduce la resolución en los canales del color (opcional).
2. Se divide la imagen en bloques de 8 x 8 y se transforma cada bloque mediante la TDC.
3. Se realiza un proceso de cuantificación (lo que hace que sea un método de compresión con pérdida de datos).
4. Se codifica el conjunto de datos obtenidos usando un método que no produce pérdidas (Run Length Encoding + Huffman).

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



90

- **Estándar de compresión JPEG. Paso 1: De RGB a YCbCr**

RGB: las imágenes se almacenan en 3 canales independientes (rojo, verde y azul) que toman valores de 0 a 255, dependiendo de la intensidad.

YCbCr: (Luminance, Chrominance Blue, Chrominance Red), representa una división entre la luminosidad o cantidad de luz percibida (Y) y la información sobre los colores azul y rojo (Cb, Cr).

$$\begin{aligned} Y &= 0.299 R + 0.587 G + 0.114 B \\ Cb &= -0.1687 R - 0.3313 G + 0.5 B + 128 \\ Cr &= 0.5 R - 0.4187 G - 0.0813 B + 128 \end{aligned}$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



91

- **Estándar de compresión JPEG. Paso 1: De RGB a YCbCr**

El ojo humano es menos sensible a los matices de color que a la cantidad de luz percibida. Por eso, un primer paso consiste en reducir la información almacenada en los canales del color (Cb, Cr). Por ejemplo, si la reducimos a la mitad, en el caso de una imagen 8 x 8 en formato YCbCr, la reduciríamos a un canal Y de 8 x 8 y sendos canales Cb y Cr de 4 x 4 (lo que se denota por 4:2:2). Para calcular los valores nuevos de estos canales podemos hallar la media aritmética de los valores de cada 4 píxeles.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



92

- **Estándar de compresión JPEG. Paso 1: De RGB a YCbCr**

Este es un trozo de imagen original y comprimida JPEG, ampliadas para ver las diferencias. Como vemos, los colores rojo y azul en la imagen original se han visto alterados en la imagen JPEG.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



93

- **Estándar de compresión JPEG. Paso 1: De RGB a YCbCr**

Para evitar este efecto, algunos programas ofrecen este paso de manera opcional en la compresión JPEG. De esta forma, los colores no se ven tan degradados y la imagen original y comprimida son prácticamente iguales.



Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



94

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 2: Cálculo TDC**
 - Es la herramienta clave en el estándar de compresión JPEG.
 - La imagen se descompone en sumas de cosenos (y no de senos y cosenos como en la de Fourier) y sólo toma valores reales.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



95

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 2: Cálculo TDC**

- La TDC de una función de una variable $f(x)$ es:

$$C(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right)$$

- La transformada inversa:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) C(u) \cos \left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right)$$

donde $\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{for } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{for } u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



96

• Estándar de compresión JPEG. Pasos 2 : Cálculo TDC

- La TDC de una función bidimensional $f(x,y)$:

$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right)$$

para u y v entre 0 y $N-1$.

- La transformada inversa:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v) C(u, v) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right)$$

para x y y entre 0 y $N-1$.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



97

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 2: Cálculo TDC**

- El núcleo de la TDC es simétrico y separable:

$$g(a, b) = \alpha(b) \cos \frac{(2a + 1)b\pi}{2N}$$

Por tanto, la TDC se puede expresar matricialmente como:

$$C = M F M^t$$

para cierta matriz M.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



98

• Estándar de compresión JPEG. Pasos 2: Cálculo TDC

- **Ejemplo:** Para el caso $N=8$, se tiene $g(a,b) = \alpha(b) \cos \frac{(2a+1)b\pi}{16}$

Y la matriz M se define como aquella que en la posición (i,j) contiene al elemento $g(i,j)$:

$$M = \begin{matrix} 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} \\ \phi(1) & \phi(3) & \phi(5) & \phi(7) & \phi(9) & \phi(11) & \phi(13) & \phi(15) \\ \phi(2) & \phi(6) & \phi(10) & \phi(14) & \phi(18) & \phi(22) & \phi(26) & \phi(30) \\ \phi(3) & \phi(9) & \phi(15) & \phi(21) & \phi(27) & \phi(33) & \phi(39) & \phi(45) \\ \phi(4) & \phi(12) & \phi(20) & \phi(28) & \phi(36) & \phi(44) & \phi(52) & \phi(60) \\ \phi(5) & \phi(15) & \phi(25) & \phi(35) & \phi(45) & \phi(55) & \phi(65) & \phi(75) \\ \phi(6) & \phi(18) & \phi(30) & \phi(42) & \phi(54) & \phi(66) & \phi(78) & \phi(90) \\ \phi(7) & \phi(21) & \phi(35) & \phi(49) & \phi(63) & \phi(77) & \phi(91) & \phi(105) \end{matrix}$$

$$\phi(z) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{z\pi}{16}\right)$$

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



99

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 2: Cálculo TDC**

- **Ejemplo:**



Imagen I

31	23	60	93	49	57	57	35
31	21	74	73	55	52	45	44
25	16	82	65	61	38	50	51
26	38	91	61	62	28	49	50
17	85	70	76	50	34	37	43
29	90	68	53	43	25	30	49
116	184	108	25	52	26	38	36
151	144	182	129	44	23	41	39

Matriz F (intensidades de gris)

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 2: Cálculo TDC**

- **Ejemplo:**

$$C = M F M^t = \begin{matrix} 466.2500 & 100.9063 & -40.3393 & -91.1315 & -25.2500 & 2.6791 & -3.3152 & 16.6482 \\ -88.4065 & -146.0661 & -67.5059 & 26.1243 & 33.4120 & 44.3008 & 24.6658 & -0.4861 \\ 69.5604 & 73.4218 & 17.6909 & 8.1087 & -1.2285 & 31.3229 & 12.3824 & -7.9303 \\ -44.0839 & -28.5187 & 4.3866 & 18.4638 & -11.9507 & -32.1620 & -31.1853 & -32.1898 \\ 27.5000 & 12.2552 & -25.4491 & -19.8833 & 9.5000 & 35.2306 & 3.2352 & -10.1438 \\ -2.2299 & 6.3770 & 26.7637 & 18.3775 & -13.4471 & -20.9802 & -10.1116 & 19.2261 \\ -10.4122 & -22.5187 & -20.8676 & -15.9436 & 17.2859 & 25.7420 & 9.5591 & -4.7470 \\ 8.0193 & 11.5534 & 7.5823 & 9.4544 & -9.8801 & -12.0629 & -13.2570 & -7.4175 \end{matrix}$$

- Como podemos observar, los valores mayores se encuentran en la parte triangular superior-izquierda de la matriz.

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 3: Normalización**

- Para almacenar la matriz C se realiza un proceso de normalización que consiste en:

- Buscar una función $N(u,v)$ (matriz de normalización) tal que

$$C^*(u,v) = \text{Redondeo} (C(u,v) / N(u,v))$$

sea una matriz con “muchos” ceros.

- C^* es la matriz que se almacena.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



102

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 3: Normalización**

- JPEG recomienda la siguiente matriz de normalización estandarizada para imágenes con 256 niveles de intensidad:

$$N(u,v)=$$

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 3: Normalización**

- Aplicando esta normalización a nuestro **ejemplo** obtenemos que la matriz que debemos almacenar es:

$$C^*(u,v) = \begin{matrix} 29 & 9 & -4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -12 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 3: Normalización**

- Es en el paso de normalización donde radica la pérdida de información. Dependiendo de cómo normalicemos C^* , conseguiremos comprimir más pero, a la vez, perder más información.
- Para poder aplicar la TDC según el estándar JPEG, debemos dividir la imagen original en matrices cuadradas de 8×8 píxeles.
- Cada matriz C de 8×8 píxeles obtenida aplicando la TDC a cada subimagen de dimensión 8×8 se aproxima por otra más sencilla C^* mediante el proceso de normalización.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



105

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 4: Codificación. Almacenamiento de la imagen normalizada.**

- Para almacenar C^* se sigue un recorrido en zig-zag de la matriz para obtener una lista con los ceros acumulados al final.

Orden del recorrido →

0	1	5	6	14	15	27	28
2	4	7	13	16	26	29	42
3	8	12	17	25	30	41	43
9	11	18	24	31	40	44	53
10	19	23	32	39	45	52	54
20	22	33	38	46	51	55	60
21	34	37	47	50	56	59	61
35	36	48	49	57	58	62	63

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



106

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 4: Codificación. Almacenamiento de la imagen normalizada.**
 - Para almacenar C^* se sigue un recorrido en zig-zag de la matriz para obtener una lista con los ceros acumulados al final.
 - Se usa Run Length Encoding para codificar la lista resultante, ya que suele tener muchas secuencias de ceros.
 - En combinación con esta técnica, se usa un código de Huffman para codificar el resultado. Aunque podemos utilizar una compresión de Huffman propia, existen unas tablas estandarizadas que nos permiten obtener un código de Huffman para cualquier valor.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



107

- **Estándar de compresión JPEG. Pasos 4: Codificación.**

- Ejemplo: $C^* =$

29	9	-4	-6	-1	0	0	0
-7	-12	-5	1	1	1	0	0
5	6	1	0	0	1	0	0
-3	-2	0	1	0	0	0	-1
2	1	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

29,9,-7,5,-12,-4,-6,-5,6,-3,2,-2,1,1,-1,0,1,0,0,1,0,0,0,

1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,F.

Con la letra F (de fin) indicamos que desde ese elemento hasta el final de la lista son todos ceros (hasta completar los 64 elementos de la lista). El término DC (29 en el ejemplo) se codifica haciendo la diferencia con el de la subimagen anterior. La codificación de los términos AC (el resto) se realizan siguiendo unas tablas estandarizadas.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



108

- **Estándar de compresión JPEG. Descompresión:**

- **Paso 1:** Descodificarla para obtener la matriz normalizada C^* .

- **Paso 2:** “Deshacemos” la normalización:

$$C'(u,v) = C^*(u,v) N(u,v),$$

donde $N(u,v)$ es la matriz de normalización.

- **Paso 3:** Aplicamos la transformada inversa de C' para obtener F' .

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



- Estándar de compresión JPEG. Descompresión:**

Matriz descomprimida

34	20	61	118	41	63	62	25
27	19	68	79	42	36	63	44
18	32	84	56	60	22	55	55
11	57	88	64	75	37	36	51
17	76	66	63	55	53	21	50
48	97	59	51	23	45	19	55
105	135	113	66	30	27	29	49
153	172	182	98	63	16	38	35

Matriz original

31	23	60	93	49	57	57	35
31	21	74	73	55	52	45	44
25	16	82	65	61	38	50	51
26	38	91	61	62	28	49	50
17	85	70	76	50	34	37	43
29	90	68	53	43	25	30	49
116	184	108	25	52	26	38	36
151	144	182	129	44	23	41	39

Matriz diferencia

3	-3	1	25	-8	6	5	-10
-4	-2	-6	6	-13	-16	18	0
-7	16	2	-9	-1	-16	5	4
-15	19	-3	3	13	9	-13	1
0	-9	-4	-13	5	19	-16	7
19	7	-9	-2	-20	20	-11	6
-11	-49	5	41	-22	1	-9	13
2	28	0	-31	19	-7	-3	-4

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



110

- **Estándar de compresión JPEG.**



a b c
d e f

FIGURE 8.32 Two JPEG approximations of Fig. 8.9(a). Each row contains a result after compression and reconstruction, the scaled difference between the result and the original image, and a zoomed portion of the reconstructed image.

Tema 3: Procesamiento en el dominio de la frecuencia



111

Bibliografía básica

R.C. González, R.E. Woods, Digital Image Processing, Pearson Prentice Hall, 2008

Para explorar

<http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/ftdemo.htm>