Problemas resueltos
La curva normal

Vicente Manzano-Arrondo, 2013

Podríamos llevar a cabo todo tipo de ejercicios. Algunos son muy simpáticos desde el punto de vista gráfico, tomados casi como manualidades con figuras de cartulina que simulan curvas normales. Pero no nos vamos a entretener en ello, para ir más directamente al grano. Las situaciones a las que nos vamos a enfrentar de forma habitual serán casos de estimación estadística, donde nos interesará manejar áreas o probabilidades centradas; y también situaciones de decisión estadística (mediante la prueba de significación de la hipótesis nula), en las que necesitaremos manejar áreas extremas, bien sea en un solo de los extremos (pruebas de una cola o unilaterales) como en los dos (pruebas de dos colas o bilaterales). Así que vamos a ocuparnos de ello.

Para resolver los problemas, ten en cuenta que las tablas que manejamos utilizan únicamente puntuaciones tipo (son tablas de la curva normal estandarizada), mientras que todos los enunciados se expresan en puntuaciones directas. Así que tendrás que pasar de Z a X o de X a Z según cada ocasión.

Problema 1

Contamos con un test para medir cociente intelectual que, según el manual de instrucciones y las investigaciones que lo sustentan, suministra puntuaciones que se distribuyen según una ley normal en la población, como media aritmética de valor 50 y desviación tipo de 15. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

1. Qué valores de C.I. muestra el 90% central de la población.
2. Cómo es el 7% de los C.I. más raros.
3. Qué valores tiene el 10% de los C.I. más elevados.
4. Cuál es la probabilidad de encontrar valores de C.I. superiores a 65.
5. Qué porcentaje de personas tienen un C.I. inferior a 40.
6. Cuántas personas, de un total de 2000, cabe esperar que tengan valores de C.I. alejados de la media en no más de 20 puntos.

Problema 2

Joseph von Martínez ha inventado una escala para medir resistencia individual a la opresión. Su instrumento suministra valores que siguen una ley normal con media 75 y desviación tipo 8. Con esta información.

1. ¿Qué valores acotan el 20% superior en la población?
2. ¿Y el 77% central?
3. ¿Y el 66% más extremo?
4. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a personas con una resistencia a la opresión al menos de 87 puntos?
5. ¿Y de que sea, como mucho, de 67?
6. ¿Qué porcentaje de personas se alejan de la media en
   a) al menos 10 puntos?
   b) a lo sumo 6 puntos?

Soluciones

Problema 1

1. Qué valores de C.I. muestra el 90% central de la población.

De la tercera tabla, puede observarse directamente que el 90% central se corresponde una distancia estandarizada de valor 1,645. Esto es en valores absolutos, puesto que las Z que el 90% central se encuentra entre -1,645 y +1,645. Por lo tanto:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow X_i = \mu \pm Z_i\sigma = 50 \pm 1{,}645 \cdot 15 = 50 \pm$$

Así pues, el 90% de la población muestra puntuaciones de C.I. comprendidas entre los valores 25,3 y 74,7.

2. Cómo es el 7% de los C.I. más raros.

Si no se indica otra cosa, los valores más raros de C.I. se encuentran repartidos entre ambos extremos, por lo que hablamos de un 3,5% a cada lado de la distribución o bien los mismos valores que acotan el 93% central. Esto implica una Z = 1,812. Luego:

$$X_i = \mu \pm Z_i \sigma = 50 \pm 1{,}812 \cdot 15 = 50 \pm 27{,}18 = \{ 22{,}82$$

Así pues, el 7% de la población con puntuaciones más extremas de C.I. muestra valores que superan 77,18 o son inferiores a 22,82.

3. Qué valores tiene el 10% de los C.I. más elevados.

En este caso, el extremo se encuentra íntegramente en la zona de los valores superiores. Hablamos de un área acumulada del 90%, para lo que contamos con la tabla 2 (distancias para áreas acumuladas), que indica Z = 1,282. Si optamos por utilizar la tercera tabla (distancias para áreas centradas), habría que buscar el área centrada del 80% (que deja por encima y por debajo al 10%). Si optamos por la primera tabla (áreas centradas para la distancia), el 10% superior es acotado por la misma distancia que el 40% hasta la media. En todo caso, encontraremos siempre el mismo valor de Z.

$$X_i = \mu \pm Z_i \sigma = 50 + 1{,}282 \cdot 15 = 69{,}23$$

Luego, el 10% superior comienza con el C.I. de valor 69,23.

4. Cuál es la probabilidad de encontrar valores de C.I. superiores a 65.

Para encontrar el valor de probabilidad, es necesario traducir previamente la puntuación directa 65 a una distancia estandarizada.

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{65 - 50}{15} = 1$$

Acudiendo, por ejemplo, a la primera tabla, una distancia estandarizada de una unidad se corresponde con un área hasta la media de valor 0,341. Lo que resta hasta el extremo superior es 0,5 – 0,341 = 0,159. Luego, la probabilidad de encontrar valores de C.I. superiores a 65 es 0,159.

5. Qué porcentaje de personas tienen un C.I. inferior a 40.

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{40 - 50}{15} = -0,67$$

Se trata, del mismo modo, de una distancia extrema, esta vez relativa al extremo inferior de la distribución. Consultando, por ejemplo, la tabla de distancias a la media tenemos que una Z=0,67 se corresponde con una probabilidad de valor 0,249. Hasta el extremo inferior, hablamos de 0,5 - 0,249 = 0,251. Luego, el porcentaje de personas con un C.I. inferior a 40 es 25,1%.

6. Cuántas personas, de un total de 2000, cabe esperar que tengan valores de C.I. alejados de la media en no más de 20 puntos.

Respondiendo a la pregunta en probabilidad o porcentaje, podremos encontrar la solución aplicando ese valor a 2000. Hagámoslo pues.

Alejarse de la media en no más de 20 es contar con más de 30 y menos de 70 como valores de C.I. No obstante, no es necesario manejar los valores que acotan el intervalo. Nos basta con la diferencia.

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{20}{15} = 1{,}33$$

Una Z = 1,33 se corresponde con un área hasta la media de 0,408. Dado que hablamos de una distancia a ambos lados (sea por encima o por debajo de la media), la probabilidad asociada es 0,408·2 = 0,816. Luego, si el 81,6 % se aleja de la media en no más de 20 puntos, entonces hablamos de 2000·0,816 = 1632 personas.

Problema 2

1. ¿Qué valores acotan el 20% superior en la población?

$$X_i = \mu + Z_i \sigma = 75 + 0{,}842 \cdot 8 = 81{,}74$$

2. ¿Y el 77% central?

$$X_i = \mu \pm Z_i \sigma = 75 \pm 1{,}2 \cdot 8 = 75 \pm 9{,}6 = \{65{,}4\ ;\ 84{,}6\}$$

3. ¿Y el 66% más extremo?

$$X_i = \mu \pm Z_i \sigma = 75 \pm 0{,}44 \cdot 8 = 75 \pm 3{,}52 = \{71{,}48\ ;\ 78$$

4. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a personas con una resistencia a la opresión al menos de 87 puntos?

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{87 - 75}{8} = 1{,}5 \quad \rightarrow \quad prob. = 0{,}5 - 0{,}433$$

5,7%

5. ¿Y de que sea al menos de 67?

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{67 - 75}{8} = -1 \quad \rightarrow \quad prob. = 0,5 + 0,341$$

84,1%

6. ¿Qué porcentaje de personas se alejan de la media en
   a) al menos 10 puntos?

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{10}{8} = 1,25 \quad \rightarrow \quad prob. = 1 - 0,4 \cdot 2 = 0,$$

20%

   b) a lo sumo 6 puntos?

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{6}{8} = 0,75 \quad \rightarrow \quad prob. = 0,273 \cdot 2 = 0,54$$

54,6%