

Problemas

Prueba de significación de la hipótesis nula

Vicente Manzano-Arrondo, 2013

Ejercicios resueltos

En los dos casos que siguen resuelven cada decisión estadística mediante tres procedimientos: intervalo de confianza, distancia estandarizada y comparación de probabilidades.

1. Datos de diferentes titulaciones universitarias hacen suponer que la media de años que se requieren para culminar los estudios de psicología es de 7. Para comprobarlo se obtiene una muestra aleatoria simple de 50 expedientes, encontrándose una media de 6 años y una desviación tipo de 4 años. Con un nivel de significación de 0,05 ¿puede mantenerse la afirmación inicial de los siete años?

Esquema: $n=50$; $\bar{X}=6$; $S=4$; $\alpha=0,05$; $\mu=7$?

Manejamos una distribución muestral de medias grande (pues $50 > 30$), por lo que procede recurrir a la normal y traducir $\alpha=0,05$ en $Z=1,96$.

A) Enunciado de la hipótesis nula común a los tres procedimientos: $H_0 \Rightarrow \mu = 7$

Cálculo y decisión a partir de una estimación por intervalo:

B)

$$e_p = Z \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 1,96 \frac{4}{\sqrt{50-1}} = 1,12; \quad \mu \in \{4,88 ; 7,12\}_{0,95}$$

C) Decisión: dado que el valor que defiende la hipótesis nula (7) se encuentra en el intervalo de los valores esperados, se mantiene la hipótesis nula utilizando un nivel de significación del 5%.

Cálculo y decisión a partir de distancias estandarizadas:

B)
$$Z_o = \frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma_x} = \frac{|\bar{X} - \mu|}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{|6-7|}{4/\sqrt{50-1}} = 1,75$$

C) Decisión: dado que la distancia observada (1,75) es inferior a la máxima esperada (1,96) suponiendo cierta la hipótesis nula, entonces ésta es compatible con lo encontrado. Por lo tanto, se mantiene la hipótesis nula utilizando un nivel de significación del 5%.

Cálculo y decisión a partir de probabilidades:

B) La traducción de $Z=1,75$ en probabilidad, según la tabla de confianzas, suministra una confianza del 92%, es decir un grado de significación de valor 0,08.

C) Decisión: dado que el riesgo calculado de errar al rechazar la hipótesis nula (0,08) es superior al límite máximo admisible (0,05), no se rechaza. Por ello, se mantiene la hipótesis nula utilizando un nivel de significación del 5%.

D) Conclusión para los tres procedimientos:

Sí, puede mantenerse la afirmación inicial de los siete años.

2. Tras preguntar a una muestra de 37 personas por su nivel de satisfacción con su operador de telefonía móvil, hemos encontrado un nivel medio de 45 (en una escala de 0 a 100) y una desviación tipo de 10 puntos. Con un nivel de seguridad del 97% ¿puede afirmarse que la satisfacción media de la población es exactamente central, es decir de 50 puntos?

Esquema:

$$n=37; \bar{X}=45; S=10; \alpha=0,03; \text{¿}\mu=50\text{?}$$

Manejamos una distribución muestral de medias grande (pues $37 > 30$), por lo que procede recurrir a la normal y traducir $\alpha=0,03$ en $Z=2,17$.

A) Enunciado de la hipótesis nula común a los tres procedimientos: $H_0 \Rightarrow \mu=50$

Cálculo y decisión a partir de una estimación por intervalo:

B)

$$e_p = Z \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 2,17 \frac{10}{\sqrt{37-1}} = 3,62; \quad \mu \in (41,38 ; 48,62)_{0,03}$$

C) Decisión: dado que el valor que defiende la hipótesis nula (50) no se encuentra en el intervalo de los valores esperados, se rechaza la hipótesis nula utilizando un nivel de significación del 3%.

Cálculo y decisión a partir de distancias estandarizadas:

B)
$$Z_o = \frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{|\bar{X} - \mu|}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{|45 - 50|}{10/\sqrt{37-1}} = 3$$

C) Decisión: dado que la distancia observada (3) es superior a la máxima esperada (2,17) suponiendo cierta la hipótesis nula, entonces ésta es incompatible con lo encontrado. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula utilizando un nivel de significación del 3%.

Cálculo y decisión a partir de probabilidades:

B) La traducción de $Z=3,00$ en probabilidad suministra un grado de confianza superior al 99% (pues 99% se corresponde con $Z=2,5758$), lo que implica un grado de significación de valor inferior a 0,01.

C) Decisión: dado que el riesgo calculado de errar al rechazar la hipótesis nula ($<0,01$) es inferior al límite máximo admisible (0,03), asumimos el riesgo. Por ello, se rechaza la hipótesis nula utilizando un nivel de significación del 3%.

D) Conclusión común a los tres procedimientos:

No puede afirmarse que el nivel medio de satisfacción con el operador de telefonía móvil sea de 50 puntos.

3. Hemos preguntado a una muestra aleatoria de personas de la tercera edad por su valoración en torno a cómo han cambiado las relaciones entre la generación de los mayores y de los jóvenes. Tras analizar las respuestas, una de las variables generadas es si cada persona entrevistada considera que las relaciones intergeneracionales van hoy mejor, igual o peor que antes. Los datos correspondientes a esa variable son

Enunciados

- C. Con una seguridad del 99% ¿Puede afirmarse que más de un tercio de la población de la tercera edad considera que esas relaciones están hoy mejor que antes?
- D. Mediante este mismo estudio, sabemos que en torno al 60% de la población (en general, sin distinguir edades) opina que ahora las relaciones intergeneracionales están peor. Con un nivel de confianza del 90% responde a la siguiente pregunta ¿esa opinión es diferente en el caso de la tercera edad? Resuelve el problema mediante el procedimiento de comparación de probabilidades.

Soluciones

3A.

A. $H_0: \pi = 0.5$

B.

$$Z_o = \frac{|p - \pi|}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{|0.3 - 0.5|}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{30}}} = 2.19 > 1.2 = z_{\alpha/2}$$

Para realizar la traducción de una seguridad del 77% a una distancia estandarizada de 1,2 hay que comprobar si podemos suponer que la distribución muestral de proporciones es normal. Los supuestos se cumplen, pues $0.5 \cdot 30$ y $(1 -$

0,5)·30 dan ambos un resultado superior a 5. Así que podemos realizar esa traducción sin problemas.

C. Se rechaza la hipótesis nula, utilizando $\alpha = 0,23$.

D. No puede afirmarse que la mitad de la población de la tercera edad considere que esas relaciones son ahora las mismas que antes.

3B.

A. $H_0: \pi \leq 0.33$

B.

$$Z_o = \frac{|p - \pi|}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{|0.43 - 0.33|}{\sqrt{\frac{0.33(1-0.33)}{30}}} = 1.16 < 1.64$$

Para realizar la traducción de una seguridad del 95% a una distancia estandarizada de 1,64 hay que comprobar si podemos suponer que la distribución muestral de proporciones es normal. Los supuestos se cumplen, pues $0,33 \cdot 30$ y $(1 - 0,33) \cdot 30$ dan ambos un resultado superior a 5. Así que podemos realizar esa traducción sin problemas. Dado que se trata de una prueba de una cola, lo que consulto en la tabla no es la confianza del 95% (100-5 repartido en dos colas de 2,5%), sino del 90% (100-10, pues es el equivalente a dos colas de 5%).

C. Se mantiene la hipótesis nula, utilizando $\alpha = 0,05$.

D. No puede afirmarse que más de un tercio de la población de la tercera edad considere que las relaciones intergeneracionales son ahora peor que antes.

3C. Al observar los datos de la muestra, tenemos que el porcentaje de personas de la tercera edad que consideran que las relaciones intergeneracionales son hoy mejores que antes es del 27%. Esta cantidad es ya inferior al valor de comparación (un tercio = 0,33) en la muestra, por lo que no cabe plantearse una PSHN para ver si es mayor en la población. Recordemos que la lógica de la PSHN es si lo que hemos encontrado (en la línea de lo que queremos demostrar) tiene la intensidad suficiente como para considerarlo significativo. Si ni siquiera ocurre en la muestra, carece de sentido plantearlo en la población.

3D. A. $H_0: \pi = 0,60$

A.

$$Z_o = \frac{|p - \pi|}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{|0.43 - 0.6|}{\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{30}}} = 1.9 \Rightarrow g.s. \simeq 0$$

Para realizar la traducción de una distancia de 1,9 a una confianza del 94% (o riesgo del 6%)

hay que comprobar si podemos suponer que la distribución muestral de proporciones es normal. Los supuestos se cumplen, pues $0,6 \cdot 30$ y $(1 - 0,6) \cdot 30$ dan ambos un resultado superior a 5. Así que podemos realizar esa traducción sin problemas.

- B. Se rechaza la hipótesis nula, utilizando $\alpha = 0,10$.
- C. No puede afirmarse que el porcentaje de personas de la tercera edad que opina que hoy las relaciones intergeneracionales están peor que las de antes sea del 60%.

Ejercicios

1. Se considera que el proceso de evaluación de una asignatura genera tantos suspensos como aprobados. La promoción de 1996 obtuvo 360 aprobados entre 600 presentados. ¿Puede considerarse a esta promoción distinta de las demás en lo que se refiere al rendimiento en la asignatura? Utiliza un nivel de confianza del 95%.
2. Con objeto de averiguar el grado de efectividad de un nuevo fármaco para tratar la ansiedad, se seleccionó una muestra de 37 sujetos con dicho trastorno. Después de una semana de administración

del fármaco, se observó una media de bajada de la ansiedad de 30 puntos, con una desviación tipo de 5 (según un determinado test). Con un nivel de confianza del 99% ¿Cuál puede ser la efectividad media de este fármaco a nivel general?

3. En respuesta a los últimos problemas de conducta presentados en los centros escolares de la región, 30 maestros han dado su opinión acerca de la disciplina existente en dichos centros escolares, manifestándose un 29% de ellos a favor de la implantación de los antiguos castigos. No obstante, los estudios realizados con anterioridad coinciden en señalar que el verdadero porcentaje de maestros a favor de dicha implantación en la población es del 32%. Esto supuesto y utilizando un nivel de confianza del 99%, ¿Puede aceptarse que el verdadero porcentaje de maestros a favor de la implantación de los antiguos castigos es del 32%?

4. La aplicación de un determinado cuestionario suministra la siguiente información: la credibilidad del líder del partido H.P. es de 15 puntos de media (en una escala de 0 a 40). Tras una aparición del líder en un programa televisado, se realiza una nueva recogida de datos, obteniéndose una media de 16 puntos y una desviación típica de 8 puntos en una muestra aleatoria de 120 personas. Utilizando un nivel de confianza del 99% ¿Ha cambiado la credibilidad del líder?.

5. Se cree que aproximadamente la mitad de los jóvenes entre 18 y 25 años votan a un partido con tendencia conservadora. Comprueba esta creencia, utilizando un nivel de significación de 0,05, sabiendo que 30 jóvenes pertenecientes a una muestra aleatoria de 70, han votado a un partido con tendencia conservadora.

6. Por término medio, un niño europeo pasa tres horas y media diarias ante la televisión. Extraída una muestra aleatoria de cincuenta niños andaluces, se observa que pasan viendo programas televisados una media de tres horas al día, con una varianza de valor 2,56. ¿Puede afirmarse que los niños andaluces son diferentes a los europeos con respecto al tiempo que pasan viendo la televisión? Realiza la decisión utilizando los niveles de significación 0,01 y 0,05.

7. ¿Con cuál de las siguientes situaciones tendríamos más seguridad para no creer en la hipótesis de que los recién nacidos tienen la misma probabilidad de ser niños o niñas?

- A) De 10.000 recién nacidos, 5.100 sean varones.
- B) De 1.000 recién nacidos, 510 sean varones.

8. La siguiente tabla contiene los datos obtenidos por una muestra en una prueba psicológica (F_i = frecuencia acumulada):

X_i	14	16	17	19	20	22	23
F_i	5	11	27	39	44	48	50

Con estos datos y con un nivel de significación del 3% ¿se puede afirmar que el porcentaje de sujetos que en la población obtienen más de 17 puntos es del 60%?

9. Se cree que el 60% de la población española podría estar a favor de la reforma constitucional. Para comprobarlo se obtuvo una muestra aleatoria de 640 españoles, donde la opinión al respecto fue: 336 a favor, 220 en contra y los restantes, sin opinión definida. Con los datos obtenidos en la muestra y un riesgo de equivocación del 3%, ¿Se puede considerar que el porcentaje de españoles a favor del cambio constitucional es diferente del 60%?
